This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

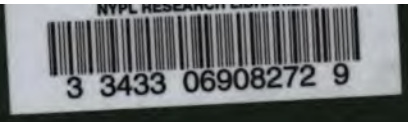
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06908272 9

TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL,

POUR SERVIR DE SUITE

L'ANALYSE DES INFINIMENT-PETITS

DE M. LE MARQUIS DE L'HÔPITAL;

Par M. DE BOUGAINVILLE, le jeune.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

A PARIS,

Chez H. L. GUÉRIN & L. F. DELATOUR,
rue Saint Jacques, à Saint Thomas d'Aquin.

M. DCC. LIV.
Approbation & Privilege du Roi.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

A MONSEIGNEUR

LE COMTE

D'ARGENSON,

MINISTRE

ET SECRÉTAIRE D'ÉTAT

DE LA GUERRE,

HONORAIRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

MONSEIGNEUR,

Il n'appartient qu'à ceux qui Vous reſſemblent, d'aſpirer au titre glorieux de Protecteurs des Sciences, parce que ſeuls capables de les chérir en Hommes de goût, & de les apprécier en

Hommes d'Etat, ils mettent une partie de leur gloire à les rendre floriſſantes. Le grand Ecrivain dont les découvertes nous inſtruiſent, & le Miniſtre éclairé dont l'eſtime bienfaiſante anime nos efforts, ont la même part à nos progrès & le même droit à notre reconnoiſſance. C'eſt ſous Vos yeux, MONSEIGNEUR, que je ſuis entré dans la carriere des Sciences : je dois Vous offrir les premiers fruits de mes travaux. S'ils ſont utiles, comme j'oſe l'eſpérer, ils ſont dignes de Vous ; & l'hommage que je Vous en fais ne l'eſt pas moins, puiſqu'il eſt ſincere & déſintéreſſé. Un motif perſonnel ſe joint cependant aux ſentimens qui me l'ont dicté : c'eſt le deſir d'inſpirer aux Lecteurs un préjugé favorable à mon Ouvrage, en le faiſant paroître ſous les auſpices d'un Nom cher à la Littérature, & fait pour paſſer à la poſtérité.

Je ſuis avec un profond reſpect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéiſſant
Serviteur, DE BOUGAINVILLE.

PRÉFACE.

LE Calcul ou la Géométrie des Infiniment-Petits a deux branches, *le Calcul différentiel* & *le Calcul intégral.* Le premier eſt l'art de trouver les grandeurs infiniment petites qui ſont les élémens ou les différences des grandeurs finies : le ſecond eſt l'art de retrouver, par le moyen des grandeurs infiniment petites, les grandeurs finies auxquelles elles appartiennent. Le Calcul différentiel deſcend du fini à l'infiniment petit ; l'intégral remonte de l'infiniment petit au fini : le premier décompoſe, pour ainſi dire, une quantité ; le dernier la rétablit. Mais ce que l'un a décompoſé, l'autre ne le rétablit pas toujours ; ſoit que tout ne ſoit pas intégrable, ſoit que l'art n'ait pu parvenir encore à intégrer tout ce qui peut l'être.

En 1684. Leibnitz donna dans les Actes de Leipſic les regles du Calcul différentiel ; & trois ans après, Newton publia ſon Livre *des Principes Mathématiques de la Philoſophie naturelle*, preſque entiérement fondé ſur ce même Calcul. Il ſe trouve ſeulement entre Leibnitz & Newton une petite différence pour

la dénomination du calcul & pour la caractériſtique * des quantités qui en ſont l'objet. L'expreſſion de Leibnitz eſt admiſe par-tout, excepté en Angleterre ; & elle paroît en effet plus commode.

Leibnitz, en donnant les regles du Calcul différentiel, en cacha les démonſtrations. Mrs Bernoulli les découvrirent auſſi-tôt, & les publierent. S'étant depuis attachés au nouveau calcul, ils y ont fait des progrès rapides ; ils l'ont même enrichi conſidérablement par les différentes méthodes qu'ils ont inventées, & par les uſages auxquels ils ont appliqué ces méthodes.

Mais ces découvertes ſemées dans différens Livres ne formoient point un tout. M. le Marquis de l'Hôpital réſolut d'en faire un

* *Nota.* Ce que Leibnitz nomme *différence*, Newton le nomme *fluxion* : ainſi ce que le premier appelle *Calcul différentiel*, le ſecond l'appelle *Calcul des fluxions*. Newton nomme auſſi *fluente* ce que Leibnitz nomme *intégrale*, & *Calcul des fluentes* ce que ce dernier nomme *Calcul intégral*. A l'égard de la caractériſtique, Newton pour marquer qu'une variable x flue ou eſt différentiée, met un point au-deſſus, de la maniere ſuivante $\dot{x}$. Pour marquer une ſeconde différence, il met deux points ; pour une troiſieme, trois points ; & ainſi de ſuite $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, &c. Leibnitz ſe ſert de la lettre d qu'il place au devant de la changeante différentiée, & il la répete autant de fois qu'il y a d'unités dans le degré de la différence. Ainſi dx, ddx ou d^2x, $dddx$ ou d^3x, &c. marquent les différences premiere, ſeconde, troiſieme, &c. de x.

corps, & de les dévoiler en même temps ſans réſerve. En 1696. il publia l'*Analyſe des Infiniment-petits* qui contient les regles du Calcul différentiel & les applications dont il eſt ſuſceptible. Le grand nom de l'Auteur dans les Mathématiques, l'accueil univerſel fait à ſon Ouvrage, les applaudiſſemens qu'il a reçus, & les progrès dont la Géométrie lui eſt redevable, me diſpenſent d'en faire l'éloge.

Quelques années après la mort de Newton, parut ſon Traité des *Fluxions* ou du Calcul différentiel, qu'il avoit compoſé en latin & achevé en 1671. En 1736. les Anglois en donnérent une traduction dans leur langue; & l'illuſtre M. de Buffon l'a depuis traduit en françois. On lit à la tête de ſa traduction une Préface, dans laquelle eſt détaillée l'hiſtoire de la diſpute qui s'éleva, au ſujet de l'invention du Calcul de l'infini, entre Leibnitz & Newton, c'eſt-à-dire, entre Leibnitz & l'Allemagne d'une part, & l'Angleterre de l'autre : car Newton laiſſant agir pour lui ſa nation, & ſur-tout ſa renommée, demeura ſimple ſpectateur. M. de Buffon n'entreprend point de décider une queſtion qui partage encore aujourd'hui l'Europe ; mais il met ſon lecteur en état de prononcer.

de Quadraturâ curvarum, publié pour la premiere fois en 1704. à la ſuite de ſon Traité d'Optique. On y trouve des méthodes générales pour intégrer certaines différentielles, des formules calculées d'après ces méthodes, l'uſage de ces formules pour conſtruire des tables d'intégrales, & enfin des tables même toutes conſtruites.

Tous les grands Géometres ont travaillé depuis à l'envi ſur cette matiere, dont l'importance & la difficulté étoient pour eux de puiſſans motifs. Les Bernoulli qui ſont preſque en droit de prétendre à la gloire de l'invention, & par la promptitude avec laquelle ils ont ſaiſi quelques rayons de cette Science qui s'échappoient à peine, & par l'uſage qu'ils en ont fait, donnerent de nouvelles méthodes d'intégration, qui ſe trouvent dans le recueil de leurs Ouvrages & dans les Actes de Leipſic. Il y a même une partie eſſentielle de la nouvelle Analyſe, qui appartient toute entiere à l'illuſtre Jean Bernoulli : c'eſt le Calcul différentiel & intégral des quantités logarithmiques & exponentielles ; quantités auxquelles Newton & Leibnitz ne paroiſſoient pas avoir penſé. Cotes enrichit encore le Calcul intégral de pluſieurs belles méthodes dans un Ouvrage intitulé :

Harmonia menſurarum ; ouvrage qui vient d'être traduit, éclairci & augmenté par le ſavant D. Charles Walmeſley, Bénédictin Anglois. *

Le premier Traité élémentaire de Calcul intégral ſe trouve dans l'Analyſe démontrée du P. Reyneau, publiée en 1708. Il y donne les principales méthodes connues de ſon temps; il en démontre même quelques-unes qui ne l'avoient pas été par leurs Auteurs. Mais depuis ce temps les méthodes ſe ſont beaucoup multipliées : d'ailleurs le P. Reyneau eſt tombé dans quelques erreurs aſſez conſidérables.

En 1730. parut un Ouvrage de M. Stone, intitulé : *Analyſe des Infiniment-petits, comprenant le Calcul intégral dans toute ſon étendue.* Le titre de ce livre promet beaucoup : mais malheureuſement l'ouvrage ne répond point au titre ; il eſt bon même d'avertir les commençans, qu'ils pourroient être induits en erreur par des paralogiſmes qui s'y rencontrent en aſſez grand nombre. Je me contenterai d'en citer un exemple : *On ne peut trouver*, dit l'Auteur dès la premiere page de ſon livre, *les Intégrales exprimées par des*

* Son Livre a pour titre : *Analyſe des meſures des rapports & des angles, ou réduction des intégrales aux logarithmes & aux arcs de cercle.*

fractions & par des quantités ſourdes, qu'en faiſant diſparoître dans les unes leur dénominateur complexe & dans les autres leur ſigne radical ; ce qui ſe fait par le moyen d'une ſerie infinie. Cette propoſition eſt évidemment fauſſe. Il ſuffit pour en être convaincu, de ſavoir les premiers principes du Calcul différentiel. Ils nous apprennent que toute fraction finie a pour différentielle une fraction, & qu'une quantité compoſée de radicaux les conſerve auſſi dans ſa différentielle. On trouvera donc dans ces deux cas des intégrales finies, ſans avoir beſoin de recourir aux ſeries infinies.

Qu'il me ſoit permis de remarquer ici que ſouvent on abuſe de ces ſeries. La théorie des Suites eſt importante, utile, néceſſaire même en certains cas. Elle a précédé la découverte des nouveaux calculs qui ne peuvent s'en paſſer quelquefois ; & c'eſt le ſupplément le plus heureux que l'on ait trouvé à l'imperfection des méthodes. Mais le calcul des Suites ne donnant que par approximation les valeurs cherchées, & d'ailleurs étant long, pénible, & quelquefois fautif dans la pratique, il me ſemble qu'on ne doit l'employer qu'avec beaucoup de réſerve & de précaution.

Enfin de tous les Ouvrages où l'on s'eſt propoſé de traiter le Calcul intégral, le plus eſtimable, au jugement des connoiſſeurs, eſt celui de Mlle Agneſi, intitulé : *Inſtituzioni analitiche all'uſo d'ella gioventú Italiana.* Ainſi l'Italie qui a été le berceau de l'Algebre, a produit auſſi l'ouvrage le plus étendu que nous ayons ſur la nouvelle Analyſe. L'illuſtre Académicienne dans la partie de ſon livre deſtinée au Calcul intégral, ſuit un ordre qui répand un grand jour ſur cette matiere : elle explique & démontre très-clairement différentes méthodes, & fait voir par-tout une grande ſcience du calcul & beaucoup d'adreſſe pour le manier. Cependant ſon ouvrage n'eſt pas complet ; & l'on peut encore regarder le Livre de M. le Marquis de l'Hôpital comme la premiere moitié d'un grand tout qui en attend une ſeconde.

En effet, depuis que l'Ouvrage de Mlle Agneſi a paru, les Mémoires des Académies des Sciences de Paris, de Berlin, de Petersbourg, de Londres, ſe ſont remplis d'excellens morceaux ſur le Calcul intégral. Mrs Daniel Bernoulli, Euler, Clairault, Fontaine, d'Alembert, & un petit nombre d'autres Géometres qui empêchent aujourd'hui l'Europe de

regretter ceux du ſiecle paſſé, ſe ſont fort attachés à cette partie importante de la Géométrie. Non contens de ſe ſervir de cet Art ſublime dans toutes leurs découvertes, ils ont perfectionné l'Art même par des méthodes également fécondes & élégantes.

Ainſi ceux qui veulent apprendre le Calcul intégral, ſont obligés d'étudier un grand nombre de pieces détachées qui ſe trouvent éparſes dans différens livres que ſouvent ils ne connoiſſent pas, ou qu'ils ſont hors d'état de conſulter. Cet obſtacle joint à la difficulté même de la matiere peut rebuter pour toujours, ou au moins arrêter dans leur courſe, de bons eſprits dont les progrès ſeroient avantageux à la Géométrie. Ajoutons que les inventeurs des méthodes écrivant ordinairement pour les Savans, ne ſongent pas toujours à ſe mettre à la portée de ceux qui commencent.

Il étoit donc à ſouhaiter qu'on recueillît & qu'on raſſemblât dans un ſeul Traité les différens morceaux ſur le Calcul intégral, diſperſés dans les ouvrages particuliers & dans les Mémoires des Académies; qu'on fît un choix des méthodes eſſentielles & générales; qu'on les préſentât ſous un point de vue facile à ſaiſir; qu'on rétablît les propoſitions intermédiaires

que ſuppriment aſſez ſouvent les inventeurs pour ne donner que des réſultats ; que l'on conduiſît enfin les commençans pas à pas & comme par la main dans les routes embarraſſées de ce labirinthe.

Je n'aurois pas oſé former un tel projet, ſi je n'y avois été encouragé par les conſeils de quelques amis, dont les lumieres m'ont été d'un grand ſecours. Sûr qu'ils ne m'abandonneroient pas dans une entrepriſe peut-être au-deſſus de mes forces, je ſuis entré dans la carriere : c'eſt au Public à juger des premiers pas que j'y fais.

J'ai mis à la tête de cet Ouvrage une Introduction, dans laquelle j'ai expoſé le Calcul différentiel des quantités logarithmiques & exponentielles, qui ne ſe trouve pas dans l'Analyſe des Infiniment-petits. J'ai été contraint à cette occaſion d'entrer dans quelque détail ſur les principales propriétés des logarithmes & de la logarithmique. Cette Introduction renferme encore une théorie abrégée des ſinus & des coſinus des angles, & des racines imaginaires des équations. Ces théorêmes m'ont été néceſſaires pour ne rien ſuppoſer dont le lecteur n'eût ſous ſes yeux la démonſtration.

Je diviſe enſuite l'Ouvrage en deux parties.

La premiere contient les regles du Calcul intégral des différentielles qui n'ont dans leur expreſſion qu'une ſeule variable avec des conſtantes quelconques. La ſeconde partie eſt deſtinée à expliquer les regles du Calcul intégral des quantités ou des équations différentielles qui renferment deux, trois, ou en général pluſieurs variables; & auſſi le Calcul intégral des ſecondes, troiſiemes, &c. différences. Cette diviſion m'a paru la plus ſimple & la plus naturelle. Je ne donne aujourd'hui que la premiere partie; la ſeconde la ſuivra de près. Je pourrois même, ſi le Public me paroît le déſirer, y joindre une troiſieme partie, qui contiendroit l'application du Calcul intégral aux plus beaux Problêmes de Géométrie, d'Aſtronomie, de Méchanique & de Phyſique.

Pour remplir le plan de ce Traité, j'ai fait enſorte de n'oublier aucune des méthodes connues juſqu'à préſent. Je les ai placées dans l'ordre où elles m'ont paru ſe prêter le plus grand jour, allant des plus ſimples aux plus compoſées. A la ſuite de l'expoſition de chaque méthode j'ai ajouté un, deux ou pluſieurs exemples généraux, afin de ne laiſſer aux commençans aucune difficulté ſur l'application des principes. Dans les endroits où l'on

ne

ne peut ſe paſſer de calculs longs & pénibles, (& ces endroits ſe rencontrent aſſez fréquemment,) j'ai fait les calculs tout au long, marchant de conſéquences en conſéquences, ſans en ſupprimer aucune; bien convaincu que le mérite principal d'un ouvrage élémentaire, eſt la clarté. En un mot, j'ai tâché qu'il ne reſtât plus à cette matiere que la difficulté qui en eſt abſolument inſéparable. Je prends mon lecteur au ſortir de l'Analyſe des Infiniment-petits de M. le Marquis de l'Hôpital, & je ſuppoſe qu'il a les connoiſſances néceſſaires pour entendre cet Ouvrage.

Les ſources dans leſquelles j'ai puiſé, ſont le *Traité de la quadrature des Courbes* de Newton; l'*Analyſe démontrée* du P. Reyneau d'où j'ai tiré pluſieurs méthodes, en avertiſſant des mépriſes qui lui ſont échappées; les Ouvrages de Jean Bernoulli; le Traité de *l'Analyſe des meſures des rapports & des angles, &c.* de D. Charles Walmeſley; l'Ouvrage de Mlle Agneſi; les Mémoires des Académies des Sciences de Paris, de Berlin & de Petersbourg; & enfin quelques Mémoires de M. d'Alembert qui ne ſont point imprimés, & qu'il a bien voulu me communiquer. Je lui dois trop pour ne pas ſaiſir cette occaſion de lui témoigner

publiquement ma reconnoiſſance, mais je n'entreprendrai point de faire ſon éloge : mes louanges n'ajouteroient pas à ſa réputation : il peut s'en repoſer ſur ſes ouvrages, ſur l'Europe & la Poſtérité.

Je finirai par avertir que rien n'eſt à moi dans cet Ouvrage, ſi ce n'eſt l'ordre que j'ai tâché de mettre dans les différentes méthodes, & la forme que je leur donne, & qui ſervira peut-être à les faire entendre. Je ſerai trop récompenſé de mon travail, ſi je puis me flatter de contribuer aux progrès des jeunes Géometres. La gloire des inventeurs eſt plus brillante ſans doute ; mais ſeroit-on Citoyen, ſi l'on ne préféroit la ſatisfaction d'être utile à l'honneur d'être admiré ?

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences,

Du 17. Janvier 1753.

NOUS Commiſſaires nommés par l'Académie, avons examiné un Ouvrage de Monſieur *de Bougainville* le jeune, qui a pour titre : *Traité du Calcul intégral pour ſervir de ſuite à l'Analyſe des Infiniment-petits de M. le Marquis de l'Hôpital.*

Cet Ouvrage eſt diviſé en deux parties : la premiere traite de l'intégration des différentielles à une ſeule variable; & c'eſt la ſeule que l'Auteur publie quant à préſent : la ſeconde doit avoir pour objet l'intégration des équations & des quantités différentielles à pluſieurs variables, & de différens ordres; elle doit, ſuivant le projet de M. de Bougainville, ſuivre de près la premiere.

L'Auteur donne dans ſa préface l'hiſtoire abrégée du Calcul différentiel & intégral, & les principes ſur leſquels eſt appuyée la métaphyſique de ce Calcul, métaphyſique que pluſieurs Auteurs ont mal entendue. Il parle enſuite des différens ouvrages & mémoires qui ont été publiés ſur le Calcul intégral, & dans leſquels il a puiſé; & il finit par préſenter à ſes lecteurs le plan général du Traité qu'il met au jour, & dont nous rendons compte.

A la tête de l'Ouvrage eſt une introduction qui contient différentes recherches néceſſaires pour l'intelligence des problêmes de Calcul intégral. Dans cette introduction M. de Bougainville, après quelques notions préliminaires, explique d'abord le Calcul différentiel des quantités logarithmiques, qui manque dans l'*Analyſe des Infiniment-petits*; & quoique cette matiere ſoit déja traitée dans pluſieurs ouvrages, M. de Bougainville l'a expliquée d'une maniere

qui la lui rend propre, & qui en donne des idées très-nettes.

Il paſſe de-là au Calcul différentiel des quantités exponentielles, branche féconde du calcul des logarithmes. Il expoſe avec beaucoup de netteté tout ce qu'on peut deſirer ſur cet article, & y joint des remarques qui font concevoir clairement la nature de ces quantités.

Enſuite viennent pluſieurs propoſitions ſur les ſinus, coſinus, tangentes & ſécantes des arcs de cercle : elles ſervent à démontrer le fameux théorême de M. *Côtes*, ſi utile dans l'intégration des fractions rationelles, & conduiſent à une théorie encore plus étendue des racines imaginaires des équations. Cette théorie difficile, mais d'autant plus néceſſaire qu'elle manque dans les livres ordinaires d'Algebre, & que le Calcul intégral ne ſauroit s'en paſſer, eſt expliquée avec beaucoup de détail & de préciſion.

La premiere partie de l'Ouvrage débute par l'intégration des différentielles de la forme la plus ſimple : l'Auteur après en avoir donné la regle, l'applique à différens cas qui paroiſſent plus compoſés, développe & réſout les difficultés qui peuvent s'y rencontrer quelquefois, & paroît avoir prévu tout ce qui peut embarraſſer les commençans.

Il remarque enſuite que l'art du Calcul intégral conſiſte à réduire par différentes transformations une différentielle donnée à cette premiere forme, la plus ſimple de toutes. En conſéquence il détaille les différentes transformations dont on peut faire uſage, en montre l'art & la méthode, indique celles de ces transformations qu'on emploie le plus fréquemment, & rend cet emploi ſenſible par des exemples choiſis.

De-là, M. de Bougainville paſſe à la théorie de l'addition des conſtantes : il entre à cette occaſion dans des détails qui nous ont paru inſtructifs, utiles & nouveaux à certains égards.

Ces recherches ſont ſuivies de la méthode pour l'intégration des différentielles binomes & trinomes : l'Auteur en faiſant uſage, comme il en avertit, du travail du P. *Reyneau*, remarque les fautes où il eſt tombé en traitant cette matiere, & les expoſe dans tout le détail & avec toute la clarté qu'exigent le nom de l'Auteur & l'importance du ſujet.

Il vient enſuite à l'intégration des fractions rationelles, & nous croyons pouvoir aſſurer qu'il ne laiſſe rien à déſirer ſur cette partie ſi eſſentielle & ſi étendue du Calcul intégral, que M. *Bernoulli* n'avoit donnée qu'imparfaitement dans les Mémoires de l'Académie 1702. L'Auteur expoſe d'une maniere ſenſible ce qui manquoit au travail de M. Bernoulli, & développe avec beaucoup de netteté & de méthode, les moyens que différens Géometres ont imaginés pour ſuppléer à ce défaut.

Il fait connoître l'uſage de ſa théorie, non-ſeulement en montrant comment on integre une fraction rationelle quelconque, mais en faiſant voir de plus comment on réduit à la forme de fractions rationelles pluſieurs différentielles qui n'ont point cette forme ; & c'eſt ici ſur-tout qu'il fait uſage des transformations expliquées plus haut.

M. de Bougainville vient enſuite à l'intégration des différentielles qui ſuppoſent la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole, ainſi que des différentielles qui dépendent de la quadrature des courbes du troiſieme ordre : matiere qu'il traite avec la même étendue que les précédentes, & avec la même exactitude.

Enfin il explique & augmente conſidérablement les recherches très-abrégées que M. *Newton* a données dans ſa Quadrature des Courbes, ſur la quadrature de celles dont les équations ont trois ou quatre termes ; & il termine la premiere partie dont nous rendons compte, par l'intégration des différentielles qui contiennent des quantités exponentielles & logarithmiques, & de celles qui ſont affectées de pluſieurs ſignes d'intégration.

L'Auteur a joint à toutes ces recherches un Chapitre ſur les Series, qui termine cette premiere partie de ſon Ouvrage. Dans ce Chapitre il donne tous les principes, & même tous les détails, néceſſaires pour ſe mettre au fait des ſeries & de leurs uſages; il enſeigne la maniere de les former, les moyens de reconnoître leur convergence ou leur divergence; & enfin leur uſage dans le Calcul intégral, & principalement dans la Quadrature du Cercle, & la conſtruction des Logarithmes.

Cet Ouvrage nous paroît remplir le déſir où les Géometres étoient depuis long-temps d'avoir un Traité ſur le Calcul intégral qui renfermât & expliquât clairement tout ce qui a été fait ſur cette matiere, & qu'on ne pouvoit juſqu'ici ſe rendre familier qu'en recherchant avec beaucoup de peine différens morceaux épars dans un grand nombre d'Ouvrages, & ſouvent même difficiles à entendre par le peu de détail dans lequel les Auteurs ſont entrés. M. de Bougainville ſupplée à ce que ces Auteurs n'ont point fait, & joint à cet avantage celui de préſenter dans un même corps, & ſous un même point de vue tous les principes & toutes les méthodes du Calcul intégral, de faire ſentir l'eſprit & l'art de ces méthodes, & de les détailler avec beaucoup d'ordre, d'intelligence & de clarté. Nous ne doutons point que la ſeconde partie, à laquelle nous ſavons que l'Auteur travaille aſſidûment, ne ſoit attendue avec beaucoup d'impatience par tous les lecteurs de celle-ci qui nous paroît très-digne de l'approbation de l'Académie & de l'impreſſion. *Signé*, NICOLE; D'ALEMBERT.

Je ſouſſigné certifie le préſent Extrait conforme à ſon original, & au jugement de la Compagnie. A Paris, ce vingt-neuvieme jour de Mars de l'année mil ſept cent cinquante-quatre.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secretaire perpétuel de l'Acad. Royale des Sciences.

AVERTISSEMENT.

DAns le courant de l'impreſſion nous nous ſommes apperçus d'une faute qui s'eſt gliſſée à l'Article VI. de l'Introduction ; nous allons la corriger ici & même éclaircir cet article qui pourroit arrêter les commençans.

Page 6. ligne 5. au lieu de $n+r$ le nombre de termes qu'il y a depuis 3 juſqu'à 8, *& du reſte de l'Article, liſez*, $n+r$ le nombre de termes qu'il y a depuis m juſqu'à 8, on aura, comme l'on ſait par la théorie des progreſſions géométriques, $m = 3^{\frac{1}{n}}$. Donc en prenant les logarithmes des deux membres de cette équation, on aura $\frac{1}{n} l3$, ou $\frac{s}{n}$ pour le logarithme de m. On aura de même $8 = m^{n+r}$; donc $(n+r).lm$, ou $(n+r).\frac{s}{n}$ ſera le logarithme de 8.

TRAITÉ

TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL,
SERVANT DE SUITE
A L'ANALYSE
DES INFINIMENT-PETITS
DE M. LE MARQUIS DE L'HOPITAL.

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER.

Définition du ſujet, Diviſion de l'Ouvrage, & Explication de quelques Signes dont on ſe ſervira dans la ſuite.

I.

DÉFINITION. L'ART de trouver les grandeurs infiniment petites qui ſont les différences ou les élémens des grandeurs finies, ſe nomme *le Calcul différentiel.* M. le Marquis de l'Hopital, dans ſon Livre inti-

Ce que c'eſt que le *Calcul intégral.*

tulé *Analyſe des infiniment petits*, a donné les regles de ce Calcul, & a montré les uſages auxquels on le peut appliquer. L'art de remonter des grandeurs infiniment petites aux grandeurs finies dont elles ſont la différence, c'eſt-à-dire de trouver ces grandeurs finies, s'appelle *le Calcul Intégral ;* & la quantité finie dont une quantité différentielle eſt l'élément ou la partie infiniment petite, s'appelle *l'Intégrale* de cette différentielle.

II.

Diviſion de l'Ouvrage.

Nous diviſerons ce Traité du Calcul intégral en deux parties.

Dans la premiere nous donnerons les méthodes d'intégrer les différentielles qui n'ont qu'une changeante.

La ſeconde aura pour objet l'intégration des différentielles qui contiennent deux, ou un plus grand nombre de variables.

Tel eſt le plan de ce Traité. Pour le remplir, nous établirons, avec le plus d'ordre qu'il nous ſera poſſible, les différentes méthodes ſur leſquelles eſt fondé le Calcul intégral, & nous leur donnerons la plus grande généralité dont elles ſeront ſuſceptibles, auſſi-bien qu'aux exemples qui en ſeront l'application.

III.

Explication de quelques Signes dont on ſe ſervira dans ce Traité.

Nous allons placer ici l'explication de quelques termes & de quelques ſignes qui reviendront fréquemment dans cet Ouvrage.

1°. Le ſigne $\int$ mis devant une quantité différentielle, indique l'intégrale de cette quantité. Ainſi $\int dx$ déſigne l'intégrale de dx ; $\int dx \times \sqrt{4p+9x}$, l'intégrale de $dx\sqrt{4p+9x}$, & ainſi des autres. Ce ſigne $\int$ s'énonce par le mot de *ſomme* ; par exemple $\int dx\sqrt{4p+9x}$ s'énonce ainſi, *ſomme* de $dx\sqrt{4p+9x}$, parce que l'intégrale de $dx\sqrt{4p+9x}$ eſt en effet la ſomme des élémens, ou quantités infiniment petites $dx\sqrt{4p+9x}$.

2°. Un point entre deux quantités indique une multiplication, auſſi-bien que le ſigne $\times$. Ainſi $ay.b$, exprime ay multiplié par b, auſſi-bien que $ay \times b$. Il en eſt de même de $(xx+fx+g).(xx+hx+i)$ &c. Nous nous ſervirons indifféremment de ces deux ſignes de multiplication.

3°. Lorſqu'une grandeur complexe eſt élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt entier ou fractionnaire, poſitif, ou négatif, on dit que cette grandeur eſt *ſous le ſigne*. Si elle n'eſt élevée à aucune puiſſance, elle eſt dite *hors du ſigne*. Ainſi dans $(abdx+2bxdx).(aax+cxx)^{\pm\frac{1}{2}}$ $aax+cxx$ eſt ſous le ſigne $\pm\frac{1}{2}$, & $abdx+2bxdx$ eſt hors du ſigne.

4°. lx ſignifie le logarithme de x ; $l(aa+xx)$, celui de $aa+xx$: llx exprime le logarithme du logarithme de x, & ainſi de ſuite : $(lx)^{\pm m}$ ſignifie le logarithme de x, élevé à la puiſſance dont l'expoſant eſt $\pm m$. Il faut bien diſtinguer $(lx)^{\pm m}$ de $l(x)^{\pm m}$ qui ſignifie le logarithme de la quantité x élevée à la puiſſance $\pm m$.

$(lx^n)^{\pm m}$ veut dire le logarithme de x^n, c'eſt-à-dire de x élevée à la puiſſance n, lequel logarithme eſt lui-même élevé à la puiſſance $\pm m$.

5°. On appelle fonction d'une quantité variable x, une autre quantité dans laquelle cette variable x ſe trouve mêlée de quelque maniere que ce ſoit avec ou ſans conſtantes. Ainſi toutes les quantités ſuivantes ſont des fonctions de x, $x^3 + x^2$; $\sqrt{\left\{\frac{a^3+x^3}{b^4+x^4}\right\}}$; $\int dx \sqrt{(a^4 x + b^3 x^2)}$; $ax^3 lx$; & ainſi de pluſieurs autres.

On appelle fonction de deux variables xy, une quantité dans laquelle ces deux variables ſe trouvent mêlées de quelque maniere que ce ſoit avec ou ſans conſtantes : telles ſont $xy - xx$; $\sqrt{(axy + byx)}$, &c.

IV.

AVERTISSEMENT. Comme on ne trouve point dans l'Analyſe des infiniment petits le calcul différentiel des quantités logarithmiques & exponentielles, nous allons le donner ici, afin que le lecteur n'ait rien à déſirer ſur cette matiere. Nous expoſerons enſuite & démontrerons quelques propoſitions ſur les Sinus, ſur les Co-ſinus & ſur les Imaginaires, qui nous ſont néceſſaires dans la ſuite de ce Traité. Outre qu'il auroit été incommode de les démontrer à l'endroit même où nous en aurons beſoin, parce que la chaîne des matieres en auroit été interrompue, le lecteur ne ſera peut-être pas fâché de les trouver ici toutes réunies en un ſeul corps.

CHAPITRE II.

Calcul différentiel des quantités logarithmiques.

V.

Définition des Logarithmes.

LEs Logarithmes ſont une ſuite de nombres en progreſſion arithmétique quelconque, répondans à une ſuite de nombres en progreſſion géométrique quelconque. Tout ſyſtême de logarithmes eſt arbitraire, c'eſt-à-dire qu'on peut ſuppoſer telle qu'on veut la progreſſion arithmétique dont il s'agit. On ſuppoſe ſeulement pour plus de ſimplicité que le logarithme de l'unité eſt zéro.

Qu'on prenne, par exemple, la ſuite de nombres en progreſſion géométrique,

1 : 3 : 9 : 27 : 81 &c.

& la ſuite de nombres en progreſſion arithmétique,

0 . *s* . 2*s* . 3*s* . 4*s* &c.

s repréſentant un nombre quelconque, & 0 étant le logarithme de l'unité ; *s* ſera le logarithme de 3, 2*s* celui de 9, & ainſi de ſuite.

VI.

Il y a plus : cette ſuite donnera non-ſeulement le logarithme d'un nombre quelconque de la progreſſion triple, mais encore le logarithme au moins approché d'un nombre quelconque qui ne ſe trouve pas dans cette progreſſion.

Par exemple, ſi on demande le logarithme de 8, il ne s'agit que de former une progreſſion géométrique continue dans laquelle ſe trouvent 1, 3, 8, 9. Soit m le ſecond terme de cette progreſſion, n le nombre de termes qu'il y a depuis m juſqu'à 3, $n+r$ le nombre de termes qu'il y a depuis 3 juſqu'à 8, on aura, comme l'on ſait par les élémens de la théorie des logarithmes, $\frac{r}{n}$ pour le logarithme de m, & $(n+r).\frac{r}{n}$ pour le logarithme de 8.

VII.

Maniere de dreſſer une Table de logarithmes.

On peut donc en ſuivant ce que nous venons d'expoſer, c'eſt-à-dire, en imaginant une progreſſion arithmétique quelconque dont le premier terme ſoit zéro, & dont les termes répondent à ceux d'une progreſſion géométrique quelconque de nombres entiers, on peut, dis-je, dreſſer une table qui repréſente les logarithmes de tous les nombres naturels depuis l'unité juſqu'à l'infini. Ces tables ſont du plus grand uſage pour faciliter les opérations arithmétiques. Par leur moyen les multiplications & les diviſions ſe réduiſent, comme l'on ſait, à des additions & à des ſouſtractions.

VIII.

Quels ſont les Logarithmes dont ſe ſervent les Géometres.

Dans les tables de logarithmes dont ſe ſervent aujourd'hui les Géometres, & qui ſont celles de Briggs, on ſuppoſe que la progreſſion géométrique eſt 1, 10, 100 &c. & la progreſſion arithmétique 0, 1, 2 &c. ou, ce qui revient au même 0, 1.000000, 2.000000 &c. en mettant autant de zéros qu'on veut après 1, 2 &c. pour repré-

ſenter ces nombres en parties décimales, & pour avoir plus exactement & ſous la forme de nombres entiers les logarithmes intermédiaires.

IX.

Telle eſt la théorie des logarithmes. En conſéquence de cette théorie, les Géometres ont imaginé une courbe $BMNV$ qu'ils ont nommé *Logarithmique*, dont la propriété principale eſt que les ordonnées AB, PM, QN, &c. étant en progreſſion géométrique, les abſciſſes correſpondantes o, AP, AQ, &c. ſont en progreſſion arithmétique. Définition de la Logarithmique. Fig. 1.

X.

Il eſt donc évident que ſi on imagine menées à cette courbe un nombre infini d'ordonnées en progreſſion géométrique, les portions d'abſciſſes correſpondantes ſeront égales entre elles. Car de ce que o, AP, AQ, &c. ſont en progreſſion arithmétique, il s'enſuit que $AP = PQ$, &c.

XI.

D'après la propriété fondamentale de la logarithmique, il eſt aiſé d'avoir ſon équation. Maniere de trouver l'équation de la Logarithmique.

PROBLEME. Trouver l'équation de la logarithmique.

SOLUTION. Soient tirées dans la logarithmique $BMNV$ les ordonnées $VT = y$, $NQ = z$, $MP = t$, $AB = u$, & tant d'autres qu'on voudra en progreſſion géométrique, répondantes aux abſciſſes x en progreſſion arithmétique. Je mene à une diſtance infiniment proche de Fig. 2.

VT, l'ordonnée vt; à la même distance de NQ, l'ordonnée aussi infiniment proche nq; & ainsi de suite. On voit que chaque portion d'abscisse, renfermée entre deux ordonnées infiniment proches, sera la même, & pourra par conséquent être désignée par dx, ensorte que $Tt = dx$, & $Qq = dx$. Or puisque $Tt = Qq$, on a par la propriété de la logarithmique $VT : vt :: NQ : nq$; donc *subtrahendo* $Vk : VT :: Ne : NQ$, c'est-à-dire $dy : y :: dz : z$. Donc la raison de dy à y sera constante, c'est-à-dire qu'on pourra égaler $\frac{dy}{y}$ à une constante. Mais dx est constante; on aura donc $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$ (a est une constante quelconque.) C'est l'équation de la logarithmique.

XII.

Démonstration de quelques propriétés principales de cette courbe.

COROLLAIRE. Donc la sous-tangente de la logarithmique est constante, c'est-à-dire qu'elle est la même pour tous les points de la logarithmique. Car l'équation précédente $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$ donne $\frac{y\,dx}{dy} = a$; or $\frac{y\,dx}{dy}$ est l'expression de la sous-tangente, comme il est prouvé dans l'analyse des infiniment petits, Sect. II. donc la sous-tangente est constante.

XIII.

THÉOREME. Je dis maintenant que soit dans une même logarithmique, soit dans deux logarithmiques différentes, les ordonnées étant prises en même rapport, les portions d'abscisses correspondantes sont entre elles comme les sous-tangentes.

DÉM.

DEM. 1°. Dans la même logarithmique $mMn'N'$, ſi Fig. 2.
$MP : mp :: N'Q' : n'q'$, on aura $Pp : Q'q' :: T'p : Vq'$. Car alors les portions d'abſciſſes Pp & $Q'q'$ ſont égales, & la ſous-tangente eſt la même. Donc, &c.

2°. Dans deux logarithmiques différentes $mMn'N'$ & Fig. 2. & 3.
nN, ſi on a $MP : mp :: NQ : nq$, on aura $Pp : Qq :: T'p : Tq$. Car en ſuppoſant d'abord que mp eſt l'ordonnée infiniment proche de MP, & de même que nq eſt infiniment proche de NQ, on aura par l'hypotheſe $MP : mp :: NQ : nq$, donc *ſubtrahendo* $Ms : mp :: Nr : nq$. Mais $Ms : mp :: Pp : T'p$, & $Nr : nq :: Qq : Tq$; donc $Pp : T'p :: Qq : Tq$, ou $Pp : Qq :: T'p : Tq$. Donc les deux portions d'abſciſſes infiniment petites Pp, Qq ſeront entre elles en raiſon des ſous-tangentes, c'eſt-à-dire en raiſon conſtante. Menant une 3e. ordonnée infiniment proche de MP & de NQ, & faiſant les mêmes proportions, on trouvera le même réſultat. Or par les propriétés des progreſſions, ſi on a $a : b :: c : d$, & $e : f :: c : d$, $g : h :: c : d$ &c. on aura $a+e+g$ &c $: b+f+h$ &c $:: c : d$. Donc la ſomme des portions infiniment petites d'abſciſſes dans une des logarithmiques, ſera à la ſomme des portions infiniment petites d'abſciſſes dans l'autre logarithmique, comme la ſous-tangente de la premiere de ces logarithmiques eſt à la ſous-tangente de la ſeconde. Donc ſi on prend dans deux logarithmiques différentes des ordonnées en même rapport, les portions d'abſciſſes correſpondantes ſeront entre elles comme les ſous-tangentes. Donc, &c.

XIV.

COROLLAIRE. Il eſt aiſé de voir maintenant que dans quelque logarithmique que ce ſoit, le logarithme du rapport d'une ordonnée quelconque à une autre ordonnée ſera ou pourra être ſuppoſé égal au nombre qui eſt déſigné par le rapport de l'abſciſſe correſpondante à la ſous-tangente. Car pourvu que le rapport des ordonnées ſoit le même, ſoit dans une même logarithmique, ſoit dans deux logarithmiques différentes, le rapport de l'abſciſſe à la ſous-tangente ſera le même.

XV.

Fig. 1. Si l'on prend maintenant AB égal à la ſous-tangente PR, on trouvera qu'en ſuppoſant $PM = 10\,AB$, $\frac{AP}{PR}$ logarithme de $\frac{PM}{AB}$ ſera $= 2.30258509$, &c. Ce logarithme ſe trouve par le moyen d'une formule que nous expliquerons dans la premiere Partie de cet Ouvrage (Art. 338.)

Donc en général quel que ſoit le rapport de AB à PR, ſi on prend $PM = 10\,AB$, on aura $\frac{AP}{PR} = 2.30258509$, &c.

Donc en faiſant $PR = 1$, on aura $AP = 2.30258509$.

Donc (Théor. précédent) quelque part qu'on prenne AB & PM, ſoit dans la même logarithmique, ſoit dans deux logarithmiques différentes, pourvu que $PM = 10\,AB$, on aura toujours $\frac{PR}{AP} = \frac{1}{2.30258509} = 0.43429448$. Donc $PR = AP \times 0.43429448$.

Donc en ſuppoſant, comme on le fait dans les tables,

que le logarithme AP du nombre 10, c'eſt-à-dire de $\frac{PM}{AB}$ eſt 1. 00000, c'eſt-à-dire eſt égal à l'unité, on aura la valeur de la ſous-tangente $PR = 0.43429448$.

XVI.

Quels ſont les logarithmes de Neper.

Telle eſt la logarithmique de Briggs, qui eſt celle des tables dont ſe ſervent les Géometres. Neper a imaginé une autre eſpece de logarithmes. On nomme ces logarithmes, hyperboliques; parce que dans la logarithmique de Neper (fig. 1.) on ſuppoſe $AB = PR$, & que cette logarithmique peut être tracée par la quadrature de l'hyperbole équilatere, rapportée aux aſymptotes, en prenant la premiere abſciſſe pour l'unité.

Pourquoi on les nomme hyperboliques.

Cette propoſition ſe démontre de la façon ſuivante. Soit l'hyperbole AKF dont l'équation eſt $y = x^{-1}$, ſoient auſſi les droites . . . . . $AB = 1$

Fig. 4.

$$BC = x$$
$$Cc = dx$$
$$CK = x^{-1} = y$$

L'eſpace élémentaire de l'hyperbole ou $KCck$ ſera par conſéquent $y\,dx$, ou $\frac{dx}{x}$ en mettant pour y ſa valeur $\frac{1}{x}$. L'eſpace entier hyperbolique $ABCK$, ou la ſomme des eſpaces élémentaires $KCkc$ eſt donc $\int\frac{dx}{x}$. Donc la logarithmique peut ſe conſtruire par la quadrature de l'hyperbole précédente. C'eſt-à-dire qu'en ſuppoſant l'hyperbole quarrable on conſtruiroit la logarithmique, en lui donnant les mêmes ordonnées qu'à l'hyperbole, & prenant les abſciſſes

de la logarithmique correſpondantes, égales aux eſpaces hyperboliques diviſés par la ligne conſtante $AB = 1$.

XVII.

Au reſte toutes les logarithmiques peuvent être priſes pour la logarithmique des tables, en ſe ſervant d'une ordonnée quelconque AB pour repréſenter l'unité dans la ſuite des nombres naturels, & de AP, ou du logarithme de $PM = 10\,AB$ pour repréſenter l'unité dans la ſuite des logarithmes, unité qu'on n'eſt pas obligé de ſuppoſer $= AB$; mais dans la logarithmique des tables on ſuppoſe pour plus de facilité l'origine A tellement placée, qu'en faiſant $AP = AB$, on ait $PM = 10\,AB$; au lieu que pour la table des logarithmes de Neper, on ſuppoſe l'origine A telle que la ſous-tangente $PR = AB$, comme nous l'avons déja dit.

XVIII.

Les principes que nous venons d'expoſer ſur les logarithmes ſuffiſent pour entendre ce que nous allons dire ſur leur calcul différentiel.

Regle fondamentale du calcul différentiel des quantités logarithmiques.

L'équation de la logarithmique $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{a}$, ſe réduit à $\frac{dy}{y} = dx$, en prenant la ſous-tangente a pour l'unité. On de-là on tire cette regle générale pour la différentiation des quantités logarithmiques.

La différence du logarithme d'une quantité quelconque x, eſt égale à la différence de cette quantité diviſée par la quantité même $\mathrm{d.l}\,x = \frac{dx}{x}$.

Ainſi la différence du logarithme de $1 \pm x$ eſt $\pm \frac{dx}{1 \pm x}$: celle du logarithme de $\pm xy$ eſt $\pm \frac{x dy \pm y dx}{\pm xy}$ en ſuppoſant la ſous-tangente de la logarithmique égale à l'unité, & ainſi des autres plus compoſées.

XIX.

Par cette regle on trouve $d.lax = \frac{a dx}{ax} = \frac{dx}{x}$. Il s'enſuit donc de-là, dira-t-on, que $lx = lax$. Il eſt aiſé de prouver que cette conſéquence n'eſt point abſurde, quoiqu'elle ne ſuive pas néceſſairement de ce que $\frac{a dx}{ax} = \frac{dx}{x}$. Soit la logarithmique $BMNV$ dans laquelle je fais $AB = b$ Fig. 1.

Solution d'une difficulté.

$PM = ab$

$QN = x$

$TV = ax$

on aura $ax : x :: a : 1$; & $ab : b :: a : 1$: Donc $ax : x :: ab : b$: donc $TQ = PA$. Maintenant qu'eſt-ce que le logarithme de QN (x) ? c'eſt le logarithme du rapport de x à une ordonnée que l'on prend pour l'unité ; donc ſi on prend AB (b) pour l'unité par rapport à x, on aura $lx = l\frac{x}{b} = QA$. Si l'on prend auſſi la même ordonnée AB pour l'unité par rapport à TV (ax), on aura $lax = l\frac{ax}{b} = TA = QA + TQ$. Donc dans ce cas $lax = lx +$ une conſtante R. Mais ſi on prend PM (ab) pour l'unité par rapport à ax, on aura $lax = l\frac{ax}{ab} = TP =$ (à cauſe de $TQ = PA$) QA. Donc dans ce cas la conſtante $R = 0$. Donc de ce que $\frac{a dx}{ax} = \frac{dx}{x}$, il s'enſuit ſeulement que $lax = lx + R$; R étant une conſtante qui peut dans certaines ſuppoſitions être $= 0$.

XX.

Autre maniere de trouver certaines différentielles logarithmiques.

Il y a certains logarithmes dont la différentielle ne ſe préſente pas au premier coup d'œil : mais on les différentie aiſément en ſe ſervant de ſubſtitutions ſimples.

Soit propoſé, par exemple, de différentier $l.lx$; je ſuppoſe $lx = y$, ce qui me donne (Art. précédent) $\frac{dx}{x} = dy$, & $l.lx = ly$, & $d(l.lx) = \frac{dy}{y}$. Mettant pour y ſa valeur, & pour dy la ſienne, on aura $d(l.lx) = \frac{dx}{x\,lx}$.

XXI.

Si la propoſée eſt $(lx)^m$, on ſuppoſera $(lx)^m = y^m$; d'où je tire $lx = y$; $\frac{dx}{x} = dy$; $d(lx)^m = my^{m-1}\,dy$. Donc en mettant pour y & pour dy leurs valeurs, la différentielle cherchée eſt $m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x}$.

XXII.

Qu'on demande à préſent la différentielle de $(lx^n)^m$, je ferai $x^n = z$; la propoſée deviendra $(lz)^m$ dont la différentielle eſt, comme nous venons de le voir, $m(lz)^{m-1}\frac{dz}{z}$; mais z (hyp.) $= x^n$, & $dz = nx^{n-1}\,dx$; donc la différentielle cherchée eſt $mn(lx^n)^{m-1} \times \frac{x^{n-1}dx}{x^n} = mn(lx^n)^{m-1}\frac{dx}{x}$.

XXIII.

Soit encore cherchée la différentielle de $(l.lx)^m$, il faudra ſuppoſer $lx = y$: cette ſuppoſition donne les équa-

tions ſuivantes, $\frac{dx}{x} = y$; $l.lx = ly$; $(l.lx)^m = (ly)^m$; donc $d(l.lx)^m = m(ly)^{m-1}\frac{dy}{y}$, & en ſubſtituant pour y & pour dy leurs valeurs, on a $m.(l.lx)^{m-1}\frac{dx}{x.lx}$. C'eſt la différentielle cherchée.

XXIV.

Enfin ſi je veux différentier $\left[l.(lx)^m\right]^n$, je ſuppoſerai $(lx)^m = y^m$, d'où il ſuit que $lx = y$, & que $\frac{dx}{x} = dy$. J'aurai auſſi en ſuivant la même ſuppoſition $\left[l.(lx)^m\right]^n = (ly^m)^n$. Or la différentielle de $(ly^m)^n$, par ce que nous avons vu précédemment eſt $mn.(ly^m)^{n-1}\frac{dy}{y}$; & en mettant pour y & dy leurs valeurs en x, cette quantité devient $mn\left(l.(lx)^m\right)^{n-1}\frac{dx}{x\,lx}$ = la différence de $\left[l.(lx)^m\right]^n$.

Telles ſont les méthodes générales pour la différentiation des quantités logarithmiques; je paſſe aux exponentielles.

CHAPITRE III.

Calcul différentiel des Quantités exponentielles.

XXV.

LEs quantités exponentielles ſont celles qui ſont élevées à une puiſſance dont l'expoſant eſt variable. Définition des Quantités exponentielles. Telle eſt, par exemple, a^x. Telles ſont encore y^x, ay^x, $a^x + y^x$.

M. Bernoulli avoit auſſi nommé ces quantités *parcourantes*, parce qu'elles parcourent, pour ainſi dire, toutes les dimenſions poſſibles ; puiſque leur expoſant étant indéterminé, cet expoſant peut être ſuppoſé égal à tel nombre qu'on voudra, poſitif ou négatif, entier ou rompu, commenſurable ou incommenſurable.

Les équations compoſées en tout ou en partie de quantités de cette eſpece, ſe nomment *équations exponentielles*, & les courbes dont ces équations expriment la nature, ſe nomment *courbes exponentielles.*

XXVI.

Ces quantités ſont de différens degrés.

Les quantités exponentielles ſont de différens degrés.

Les quantités exponentielles du premier degré, ſont celles où l'expoſant de la quantité eſt une indéterminée ſimple, comme a^y, b^x, z^t, en ſuppoſant que y, x, t ſont des quantités ſimplement indéterminées.

Une quantité exponentielle du ſecond degré eſt celle dont l'expoſant eſt lui-même une exponentielle du premier, comme a^{y^x}, & ainſi de ſuite. En général une quantité exponentielle d'un degré quelconque a pour expoſant une exponentielle du degré précédent.

Il faut appliquer ces principes aux équations & aux courbes exponentielles. Quand une équation eſt compoſée d'exponentielles de différens degrés, alors cette équation & la courbe qu'elle déſigne, prennent leur nom de l'exponentielle du degré le plus élevé.

XXVII.

XXVII.

Ces quantités tiennent, pour ainſi dire, un milieu entre les *algébriques* & les *tranſcendentes*. Elles ont de commun avec les algébriques, qu'elles ne renferment aucune grandeur infiniment petite, & avec les tranſcendentes, qu'elles ne peuvent être repréſentées par aucune conſtruction géométrique ordinaire.

XXVIII.

On peut rapporter à ce genre, ou plutôt à un genre intermédiaire entre les courbes algébriques & les exponentielles, celles que M. Leibnitz nomme *interſcendentes*. Ce ſont celles dans l'équation deſquelles on trouve quelques termes avec des expoſans irrationels, comme dans l'équation $y^{\sqrt{2}} + y = x$.

On nomme exponentielles imaginaires les quantités dont l'expoſant eſt imaginaire telles que $c^{\sqrt{-1}}$, ou $c^{x+y\sqrt{-1}}$.

XXIX.

REMARQUE. Des propriétés des logarithmes expliquées dans le Chapitre précédent, on peut déduire les deux propoſitions ſuivantes.

1°. On change une équation exponentielle en une autre qui contient les logarithmes des quantités de la premiere. Ainſi ſoit $a^x = b^y$: ces grandeurs étant égales, leurs logarithmes ſont égaux ; donc $l(a^x) = l(b^y)$. Or par la propriété des logarithmes, le logarithme de a^x eſt

D'une équation exponentielle on en tire une logarithmique.

xla, & le log. de b^y eſt ylb. Donc $xla = ylb$; donc l'équation $a^x = b^y$ conduit à cette équation plus ſimple $xla = ylb$. De même de l'équation $a^{x^z} = b^{y^u}$, on tire d'abord celle-ci $x^z la = y^u lb$; & cette derniere donnera $zlx + l.la = uly + l.lb$; & ainſi des autres.

Et d'une logarithmique une exponentielle.

2°. On tire une équation exponentielle d'une équation logarithmique. Ainſi de $xlx = la$, on déduit $x^x = a$. Cette opération s'appelle repaſſer des logarithmes aux nombres.

XXX.

De même ſi on a l'équation $ly = x$, ſuppoſant $1 = lc$, c'eſt-à-dire que c eſt un nombre dont le logarithme eſt l'unité, on aura $ly = x \times 1$, ou $ly = xlc$, d'où l'on tire $y = c^x$. C'eſt par là que l'équation de la logarithmique que nous avons trouvé être $\frac{dy}{y} = dx$, devient $y = c^x$.

Explication de cette expreſſion $y = c^x$.

Cette expreſſion veut dire que ſi on nomme b, la ſous-tangente, a l'ordonnée que l'on prend pour l'unité, c l'ordonnée à laquelle répond une abſciſſe $= b$, on aura $\frac{y}{a} = \frac{c^{\frac{x}{b}}}{a^{\frac{x}{b}}}$, équation qui ſe change en $y = c^x$, en faiſant $a = b = 1$.

Pour démontrer que l'équation $y = c^x$ eſt la même que $\frac{y}{a} = \frac{c^{\frac{x}{b}}}{a^{\frac{x}{b}}}$, remettons pour l'équation $y = c^x$ ſon équation logarithmique $ly = xlc$. On remarquera que dans cette équation y, x, & c expriment des lignes. Cependant ly exprime un nombre : car il n'y a que les nombres qui

ayent des logarithmes. Ainſi dans cette expreſſion ly, y doit être cenſée diviſée par une ligne, afin que ly repréſente véritablement le logarithme d'un nombre. Or cette ligne ne peut être ici que l'ordonnée a que l'on prend pour l'unité. Car nous avons vu plus haut que le logarithme numérique de l'ordonnée d'une logarithmique, n'eſt proprement autre choſe que le logarithme de cette ordonnée diviſée par celle que l'on prend pour l'unité. Ainſi au lieu de ly, on peut écrire $l\frac{y}{a}$. Par la même raiſon, au lieu de lc on écrira $l\frac{c}{a}$. On aura donc $l\frac{y}{a} = x\,l\frac{c}{a}$. Mais l'équation dans cet état n'eſt point homogene. Il faudra donc diviſer x par quelque ligne conſtante. Or je dis que cette ligne ne peut être que la ſous-tangente b. Car $l\frac{c}{a}$ eſt égal à l'unité, puiſqu'on a ſuppoſé que c étoit l'ordonnée dont l'unité eſt le logarithme. On aura donc $l\frac{y}{a} = x$: or cette équation revient à celle-ci, $l\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$ par l'Art. 14. puiſque le logarithme d'une ordonnée eſt égal à l'abſciſſe diviſée par la ſous-tangente. Donc l'équation de la logarithmique ſera $l\frac{y}{a} = \frac{x}{b}\,l\frac{c}{a}$ & en repaſſant aux nombres $\frac{y}{a} = \frac{c^{\frac{x}{b}}}{a^{\frac{x}{b}}}$.

XXXI.

Pour trouver maintenant les différentielles des quantités exponentielles, la ſeule regle ſuivante ſuffit. *La différentielle d'une quantité, eſt cette quantité même multipliée par la différence de ſon logarithme.*

Regle générale pour différentier les exponentielles.

Cette regle n'a pas beſoin de démonſtration. Car la

différence de x, eſt $\frac{x\,dx}{x} = dx$, ce que l'on ſait d'ailleurs.

XXXII.

Appliquée à des exemples.

Suivant cette regle la différence de c^x eſt $c^x\,dx\,lc$, ou $c^x\,dx$, en prenant c pour le nombre dont le logarithme eſt l'unité. Car le logarithme de c^x eſt $x\,lc$, dont la différence eſt $dx\,lc = dx$.

De même la différence de x^y eſt $x^y\,dy\,lx + x^{y-1}\,y\,dx$.

XXXIII.

Autre méthode pour différentier ces mêmes quantités.

Pour trouver encore autrement la différentielle de c^x, ſoit $c^x = z$, on aura $x\,lc = lz$, ou $x = lz$; donc $dx = \frac{dz}{z}$, ou $z\,dx = dz$: ou en mettant pour z ſa valeur, $c^x\,dx = dz$.

Si on veut différentier x^y, on fera $x^y = z$, ce qui donne $y\,lx = lz$; donc en différentiant $dy\,lx + \frac{y\,dx}{x} = \frac{dz}{z}$ & $z\,dy\,lx + \frac{z\,y\,dx}{x} = dz$; donc enfin mettant pour z ſa valeur, on a $x^y\,dy\,lx + x^{y-1}\,y\,dx = dz$.

Il eſt bon de remarquer à cette occaſion que $c^{lx} = x$. Car ſoit $c^{lx} = z$, on aura $l(c^{lx}) = lz$ ou $lx\,lc = lz$; donc $lx = lz$, donc $x = z$. Donc $c^{lx} = x$.

XXXIV.

Voila donc deux manieres de différentier une quantité exponentielle. La premiere eſt la plus aiſée, lorſque la quantité dont l'expoſant eſt indéterminé eſt conſtante.

Nouvel exemple de la

Ainſi qu'on demande la différence de $\frac{c^{x\sqrt{-1}} + c^{-x\sqrt{-1}}}{2}$,

je la trouverai tout de ſuite par la premiere regle premiere méthode.
$\frac{c^{tV-1}\,dz\,V-1 - c^{-tV-1}\,dz\,V-1}{2}$, & (à cauſe que $dz\,V-1 = -\frac{dz}{V-1}$), elle eſt $-dz\left(\frac{c^{tV-1}-c^{-tV-1}}{2\,V-1}\right)$.

La ſeconde méthode eſt plus commode, lorſque la quantité dont l'expoſant eſt indéterminé, eſt elle-même une indéterminée. Ainſi pour avoir la différence de x^{y^t}, je ſuppoſe $x^{y^t} = t$, ce qui me donne $y^t lx = lt$. Je différentie, & j'ai $y^t \frac{dx}{x} + lx\,d(y^t) = \frac{dt}{t}$: ou par l'article précédent, $d(y^t) = y^t dz\,ly + y^{t-1} z\,dy$, donc $\frac{dt}{t} = y^t \frac{dx}{x} + y^t dz\,lx\,ly = y^{t-1} z\,dy\,lx$; ou enfin en mettant pour t ſa valeur, on a $dt = x^{y^t} y^t x^{-1}\,dx + x^{y^t} y^t\,dz\,lx\,ly + x^{y^t} y^{t-1} z\,dy\,lx$. Il en ſera de même pour les différentielles d'un degré plus élevé. Autre exemple de la ſeconde méthode.

XXXV.

Si on avoit une exponentielle multipliée par une autre, la différentiation ſeroit auſſi aiſée. Par exemple, ſi on avoit $x^y z^u$, la différentielle de cette propoſée ſeroit $z^u \times d(x^y) + x^y \times d(z^u)$. Or nous avons appris à différentier chacun de ces deux membres.

On prendra de même la différence d'une équation compoſée ou en tout ou en partie d'exponentielles, comme $a^y + x^t = b + z^u$. Il ne s'agira pour cela que de différentier ſéparément par les méthodes précédentes chaque partie des deux membres de l'équation.

CHAPITRE IV.

Propoſitions ſur les Sinus, Co-ſinus, Tangentes, & Secantes.

XXXVI.

Intégration de quelques différentielles néceſſaire pour la ſuite.

NOus avons vu (Art. XVIII.) que la différentielle de $y = lx$ eſt $dy = \frac{dx}{x}$. Donc réciproquement l'intégrale de $dy = \frac{dx}{x}$ eſt $y = lx$; & en changeant cette équation logarithmique en une exponentielle, (Art. XXIX. N°. 2.) elle devient $x = e^y$, e repréſentant ici le nombre dont le logarithme eſt l'unité.

XXXVII.

La différence de $l(x + \sqrt{xx-1})$ eſt (Art. XVIII.) $\frac{dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{xx-1}}}{x+\sqrt{xx-1}} = \frac{dx\sqrt{xx-1} + x\,dx}{(x+\sqrt{xx-1}) \times \sqrt{xx-1}} = \frac{dx}{\sqrt{xx-1}}$. Donc réciproquement l'intégrale de $\frac{dx}{\sqrt{xx-1}}$ eſt $l(x+\sqrt{xx-1})$.

XXXVIII.

On trouvera de même que l'intégrale de $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-xx}}$ eſt $l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx})$. En effet prenant la différentielle logarithmique de $x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}$, on trouve $\frac{dx\sqrt{-1} - \frac{x\,dx}{\sqrt{1-xx}}}{x\sqrt{-1}+\sqrt{1-xx}} = \frac{dx\sqrt{-1} \times \sqrt{1-xx} - x\,dx}{(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-xx}) \times \sqrt{1-xx}}$

$= \frac{dx\sqrt{-1} \times \sqrt{1-xx} + x\sqrt{-1} \times dx\sqrt{-1}}{(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}) \times \sqrt{1-xx}} = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-xx}}$.

De cette maniere on aura auſſi $\int \frac{-dx}{\sqrt{xx-1}} = -l\left(x + \sqrt{(xx-1)}\right)$ ou $l \frac{1}{x+\sqrt{xx-1}}$. La preuve en eſt la même que pour les exemples précédens.

XXXIX.

LEMME 1. Le co-ſinus d'un angle quelconque eſt le ſinus de ſon complément. Ainſi le co-ſinus de l'arc AL eſt $CD = LK$ ſinus de LB, complément de cet arc AL. Cela eſt clair par les élémens de la Géométrie. Propoſitions ſur les Sinus, &c. démontrées par la Syntheſe. Fig. 5.

XL.

LEMME 2. La tangente d'un angle eſt égale au ſinus de cet angle diviſé par ſon co-ſinus, en ſuppoſant le rayon $= 1$.

DÉMONST. Soit l'angle DCB dont DK eſt le ſinus, CK le co-ſinus, BE la tangente. Le rayon $CB = 1$. A cauſe des triangles ſemblables CKD & CBE, on a $CK : KD :: CB : BE$. Donc $\frac{BE}{CB} = \frac{KD}{CK}$. Mais $CB = 1$. Donc, &c. Fig. 6.

XLI.

LEMME 3. Le ſinus d'un angle étant x, pour le rayon $= 1$, la différence de l'angle eſt $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$. Autres Propoſitions ſur les Sinus, &c. démontrées analytiquement.

DÉMONST. Soit l'angle ACB dont le ſinus $EB = x$; menant du centre C les lignes Cb & eb infiniment proches, & abaiſſant du point B la petite perpendiculaire Bd, Fig. 7.

on aura $db = dx$. Mais les triangles ſemblables BEC & Bdb donnent $EC\ (\sqrt{1-xx}) : CB\,(1) :: db\,(dx) : Bb = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ qui eſt la différence cherchée.

XLII.

LEMME 4. Le co-ſinus d'un angle étant x, ſa différence eſt $\frac{-dx}{\sqrt{1-xx}}$, on ſuppoſe toujours le rayon $= 1$.

Fig. 8. DEM. Soit MCB dont le co-ſinus $CP = x$, menant les lignes Cm & mp infiniment proches de CM & de PM, on tirera la petite droite $Rm = Pp = -dx$, négative, parce que le co-ſinus croiſſant, l'angle diminue. Il faut prouver que Mm différence de l'angle $MCB = \frac{-dx}{\sqrt{1-xx}}$, ce qui eſt évident. Car à cauſe des triangles ſemblables MRm & MCP, on a $MP : CM :: Rm : Mm$, c'eſt-à-dire, $\sqrt{1-xx} : 1 :: -dx : \frac{-dx}{\sqrt{1-xx}}$.

XLIII.

LEMME 5. La tangente d'un angle étant x, & le rayon 1, la différence de cet angle eſt $\frac{dx}{1+xx}$.

Fig. 9. DEM. Prenons l'angle ACD dont la tangente $AB = x$, $Bb = dx$. Dd eſt la différence de cet angle. Or on a $CB = \sqrt{1+xx}$; l'angle ABC ne différant de l'angle BbC que d'un infiniment petit Bb, ils ſont cenſés égaux; donc les triangles CAB, & bmB ſont égaux. On a donc $CB : CA :: Bb : Bm$, c'eſt-à-dire $\sqrt{1+xx} : 1 :: dx : \frac{dx}{\sqrt{1+xx}} = Bm$. Mais Bm étant infiniment petit, CB & Cm

ne

ne différent entre eux que d'un infiniment petit ; & d'ailleurs l'arc Dd étant auſſi infiniment petit peut être regardé comme une petite droite perpendiculaire à Cd. Donc les triangles CBm, & CDd ſont ſemblables : donc on a $CB\ (\sqrt{1+xx}) : CD\ (1) :: Bm\left(\frac{dx}{\sqrt{1+xx}}\right) : Dd = \frac{dx}{1+xx}$.

COROLL. Donc la différence d'un angle dont la tangente eſt $\frac{b}{a}$, & le rayon 1, $= \frac{adb-bda}{aa+bb}$, ce qui ſe trouvera tout de ſuite après ce que nous venons de dire, en mettant dans $\frac{dx}{1+xx}$ au lieu de x, $\frac{b}{a}$, & au lieu de dx, la différence de $\frac{b}{a}$, c'eſt-à-dire $\frac{adb-bda}{aa}$.

XLIV.

LEMME 6. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le lemme précédent, & faiſant la ſecante $CB = z$, on trouvera que la différence de l'angle $ACD = \frac{dz}{z\sqrt{zz-1}}$.

COROLL. Si dans $\frac{dz}{z\sqrt{zz-1}}$, on fait $z = \frac{1}{u}$, on aura $dz = -\frac{du}{uu}$, $zz = \frac{1}{uu}$: on aura donc $\frac{dz}{z\sqrt{zz-1}} = \frac{\frac{-du}{uu}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{uu}-1}} = \frac{-du}{\sqrt{1-uu}}$, élément d'un angle dont le coſinus eſt u. De là il s'enſuit que le coſinus u eſt en raiſon inverſe de la ſecante z, puiſque $u = \frac{1}{z}$; & c'eſt en effet ce qu'on ſait d'ailleurs par la Géométrie élémentaire.

XLV.

Théorêmes ſur la même matiere, dans leſquels on fait uſage des quantités exponentielles.

THÉOREME 1. Le ſinus x d'un angle $z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

DÉMONST. On a (Art. XLI.) $dz = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$: donc $dz\sqrt{-1} = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-xx}}$. Or $\int \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{1-xx}} =$ (Art. XXXVIII.) $l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx})$: donc $z\sqrt{-1} = l(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx})$. Donc en ſuppoſant e un nombre dont le logarithme eſt l'unité, on a (Art. XXX.) $e^{z\sqrt{-1}} = x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}$. Donc $e^{z\sqrt{-1}} - x\sqrt{-1} = \sqrt{1-xx}$; & en quarrant les deux membres $e^{2z\sqrt{-1}} - 2e^{z\sqrt{-1}}x\sqrt{-1} - xx = 1 - xx$, ou bien $e^{2z\sqrt{-1}} - 1 = 2e^{z\sqrt{-1}}x\sqrt{-1}$: donc $x\sqrt{-1} = \frac{e^{2z\sqrt{-1}} - 1}{2e^{z\sqrt{-1}}}$; & par conſéquent $x\sqrt{-1} = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$; donc enfin $x = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

XLVI.

THÉOREME 2. Le coſinus $\sqrt{1-xx}$ d'un angle z, dont par conſéquent le rayon eſt l'unité, & le ſinus $x = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$.

DÉMONST. Puiſque par le théorême précédent $e^{z\sqrt{-1}} = x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}$, il s'enſuit que $e^{-z\sqrt{-1}} = \frac{1}{x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}}$; or $\frac{1}{x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}} = -x\sqrt{-1} + \sqrt{1-xx}$. (ce qui eſt évident ; car en multipliant le di-

viſeur $x\sqrt{-1}+\sqrt{1-xx}$ par le quotient ſuppoſé $-x\sqrt{-1}+\sqrt{1-xx}$, le produit ſera le dividende $=1$). Donc en mettant pour $-x\sqrt{-1}$ ſa valeur $\sqrt{1-xx} - e^{z\sqrt{-1}}$ tirée de la premiere équation, on aura $e^{-z\sqrt{-1}} = 2\sqrt{1-xx} - e^{z\sqrt{-1}}$. Donc $2\sqrt{1-xx} = e^{-z\sqrt{-1}} + e^{z\sqrt{-1}}$; donc $\sqrt{1-xx} = \frac{e^{z\sqrt{-1}}+e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$.

Toutes ces propoſitions bien entendues, venons aux problêmes ſuivants. Uſage des Propoſitions précédentes.

XLVII.

PROBLEME 1. Soient α & ζ deux angles dont les ſinus ſoient appellés ſin. α & ſin. ζ, on propoſe de trouver la valeur de ſin. $\alpha \times$ cof. ζ.

SOLUTION. Nous venons de démontrer (Art. XLV.) que ſin. $\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}-e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, & (Art. ſuivant) que cof. $\zeta = \frac{e^{\zeta\sqrt{-1}}+e^{-\zeta\sqrt{-1}}}{2}$. D'où l'on tire ſin. α. cof. $\zeta = \frac{e^{(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}}-e^{-(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}}+e^{(\alpha-\zeta)\sqrt{-1}}-e^{(\zeta-\alpha)\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$.

Or ſinus $\alpha+\zeta = \frac{e^{(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}}-e^{-(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Donc $\frac{e^{(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}}-e^{-(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}$ ſin. $\alpha+\zeta$. De même $\frac{e^{(\alpha-\zeta)\sqrt{-1}}-e^{(\zeta-\alpha)\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}$ ſin. $\alpha-\zeta$. Donc en réuniſſant ces deux valeurs, on aura $\frac{e^{(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}}-e^{-(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}}+e^{(\alpha-\zeta)\sqrt{-1}}-e^{(\zeta-\alpha)\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$

$= \frac{1}{2}$ sin. $\alpha + \zeta + \frac{1}{2}$ sin. $\alpha - \zeta$. Donc enfin sin. $\alpha \times$ cos. $\zeta = \frac{\text{sin. } \alpha+\zeta}{2} + \frac{\text{sin. } \alpha-\zeta}{2}$.

XLVIII.

PROBLEME 2. Trouver la valeur de sin. $\alpha \times$ sin. ζ.

SOLUTION. Sin. $\alpha \times$ sin. $\zeta =$ (Art. XLV.) $\left(\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) \times \left(\frac{e^{\zeta\sqrt{-1}} - e^{-\zeta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) = \frac{e^{(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}} + e^{-(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}} - e^{(\alpha-\zeta)\sqrt{-1}} - e^{(\zeta-\alpha)\sqrt{-1}}}{-4}$.

Or (Art. XLVI.) $\frac{e^{(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}} + e^{-(\alpha+\zeta)\sqrt{-1}}}{-4} = -\frac{1}{2}$ cos. $\alpha + \zeta$: & de même $\frac{-e^{(\alpha-\zeta)\sqrt{-1}} - e^{(\zeta-\alpha)\sqrt{-1}}}{-4}$, ou bien $\frac{e^{(\alpha-\zeta)\sqrt{-1}} + e^{(\zeta-\alpha)\sqrt{-1}}}{4} = \frac{1}{2}$ cos. $\alpha - \zeta$. Donc les deux parties étant réunies, on aura sin. $\alpha \times$ sin. $\zeta = -\frac{\text{cos. } \alpha+\zeta}{2} + \frac{\text{cos. } \alpha-\zeta}{2}$.

COROLLAIRE 1. On prouvera de la même maniere que cos. $\alpha \times$ cos. $\zeta = \frac{\text{cos. } \alpha+\zeta}{2} + \frac{\text{cos. } \alpha-\zeta}{2}$.

XLIX.

COROLL. 2. On peut auſſi conclure de là, 1°. que cos. $\alpha + \zeta =$ cos. $\alpha \times$ cos. $\zeta -$ sin. $\alpha \times$ sin. ζ. Car ce dernier membre de l'équation $= \frac{\text{cos. } \alpha+\zeta}{2} + \frac{\text{cos. } \alpha-\zeta}{2} + \frac{\text{cos. } \alpha+\zeta}{2} - \frac{\text{cos. } \alpha-\zeta}{2} =$ cos. $\alpha + \zeta$.

2°. Que sinus $\alpha + \zeta =$ sin. $\alpha \times$ cos. $\zeta +$ sin. $\zeta \times$ cos. α, ce qui ſe prouvera comme l'article précédent.

L.

REMARQUE 1. Il faut écrire $\frac{\text{cos. } \alpha - \zeta}{2}$, & non pas cos. $\frac{\alpha - \zeta}{2}$, parce que la premiere de ces expreſſions indique la moitié du cos. $\alpha - \zeta$, que l'on doit avoir ici, & que l'autre indique le coſinus de la moitié de $\alpha - \zeta$, qui ſeroit une expreſſion fautive. Cette remarque eſt de quelque importance pour ne ſe point tromper dans l'expreſſion des ſinus & coſinus.

LI.

COROLL. 3. Le dernier Corollaire nous donne une méthode bien ſimple pour trouver les ſinus & coſinus d'arcs doubles, triples, quadruples, &c. d'arcs donnés. Si l'on a, par exemple, le coſinus donné de l'arc $AM = c$, en ſuppoſant toujours le rayon $= 1$, on aura le ſinus de cet angle $= \sqrt{1 - cc}$. Si on cherche à préſent le coſinus de l'arc AD double de AM, on remarquera que le coſinus & le ſinus de l'arc DM égal à AM ſeront auſſi c, & $\sqrt{1 - cc}$; donc on trouvera (Art. XLIX.) le coſinus de l'arc $AD = 2cc - 1$. Si on cherche le ſinus du même arc double, on le trouvera de même $= 2c\sqrt{1 - cc}$.

On en tire une méthode fort ſimple pour trouver les Sinus, & Coſinus, d'arcs multiples d'un arc donné.

Fig. 10.

Pour trouver le ſinus & le coſinus d'un arc quadruple, il faut prendre le coſinus & le ſinus de l'arc double, & enſuite ceux de l'arc double de ce ſecond; ce qui donnera, en faiſant les mêmes ſuppoſitions que ci-deſſus le coſinus

de l'arc quadruple $= 8c^4 - 8cc + 1$, & le ſinus du même arc $= 8c^3 - 4c\sqrt{1-cc}$, & ainſi de ſuite pour tous les arcs doubles d'arcs donnés.

LII.

Par cette même méthode fondée ſur le dernier Corollaire, on trouveroit avec autant de facilité, les coſinus & ſinus d'arcs triples, quintuples, &c. d'arcs donnés. Ainſi en ſuppoſant toujours c le coſinus donné d'un arc, on trouvera que le coſinus & le ſinus de l'arc double étant $2cc - 1$, & $2c\sqrt{1-cc}$, le coſinus de l'arc triple ſera $(2cc-1) \times c - 2c\sqrt{1-cc} \times \sqrt{1-cc} = 4c^3 - 3c$, & le ſinus du même arc ſera $= 2c\sqrt{1-cc} \times c + \sqrt{1-cc} \times (2cc-1) = \sqrt{4cc-1}\sqrt{1-cc}$, & ainſi de ſuite.

LIII.

Donc ſi on nomme s, & c, les ſinus & coſinus d'un arc quelconque moindre qu'un quart de cercle, & s'', s''', s^{iv}, &c. c'', c''', c^{iv}, &c. les ſinus & coſinus des arcs double, triple, quadruple, &c. de cet arc, on formera la Table ſuivante.

Table des Sinus & Cosinus d'Arcs quelconques multiples d'un Arc donné.

	Cosinus	Sinus.
Cos. arc sim..	$c = c$	$s = \sqrt{1-cc}$
Double	$c'' = 2cc-1$	$s'' = 2c\sqrt{1-cc}$
Triple.....	$c''' = 4c^3-3c$	$s''' = \overline{4c^2-1}\sqrt{1-cc}$
Quadruple..	$c'^{v} = 8c^4-8c^2+1$	$s'^{v} = \overline{8c^3-4c}\sqrt{1-cc}$
Quintuple..	$c^{v} = 16c^5-20c^3+5c$	$s^{v} = \overline{16c^4-12c^2+1}\sqrt{1-cc}$
Sextuple...	$c^{v'} = 32c^6-48c^4+18c^2-1$	$s^{v'} = \overline{32c^5-32c^3+6c}\sqrt{1-cc}$
Septuple....	$c^{v''} = 64c^7-112c^5+56c^3-cc$	$s^{v''} = \overline{64c^6-80c^4+24c^2-1}\sqrt{1-cc}$
	&c.	&c.

Dom Charles Walmesley, Bénédictin Anglois, dans son excellent Livre de l'*Analyse des Mesures*, parvient à cette même Table, mais par une méthode différente de celle qui nous y a conduits.

LIV.

REMARQUE 2. Il est bon d'observer ici, 1°. Que si on prend un angle LDB négativement, son sinus deviendra négatif sans changer de valeur, & qu'au contraire son cosinus restera positif, de sorte que sin. $-\alpha = -$ sin. α & cos. $-\alpha =$ cos. α. Cette proposition, ainsi que les deux suivantes, se conçoit par la seule inspection d'une figure fort simple. Fig. 51.

2°. Que le sinus d'un angle augmenté de 360°, ou d'un multiple de la circonférence, ne change point de valeur ni de signe; mais que s'il est augmenté de 180°, ou d'un

multiple impair de 180°, ce ſinus deviendra négatif, auſſi-bien que le coſinus, ſans changer d'ailleurs de valeur. Ainſi ſin. $\alpha + 180° = -$ ſin. α, & coſin. $\alpha + 180° = -$ coſ. α.

3°. Que ſi on augmente un angle de 90°, le ſinus de cet angle ainſi augmenté ſera égal à ſon premier coſinus, & le nouveau coſinus ſera égal au premier ſinus pris négativement; d'où il ſuit que ſin. $\alpha + 90° =$ coſ. α, & que coſ. $\alpha + 90° = -$ ſin. α.

LV.

Fig. 10. COROLL. 4. Si l'arc AM eſt plus grand qu'un quart de cercle, mais n'excede pas la demie circonférence, alors ſon coſinus ſera $-c$, & par conſéquent il faut changer dans la Table les ſignes des termes où c ſe trouve avec des dimenſions impaires.

LVI.

REMARQUE 3. Dans les équations précédentes on voit que la racine c a toujours autant de valeurs, que l'arc dont l'équation exprime le coſinus contient de fois celui dont la racine c eſt le coſinus. Par exemple, c a cinq valeurs dans l'équation $c^5 = 16c^5 - 20c^3 + 5c$. Pour
Fig. 11. trouver ces valeurs on décrira une circonférence $ACEA$ ſur laquelle on prendra l'arc AL dont le coſinus $= c^5$, & l'arc AB qui ſoit la cinquieme partie de AL. Le coſinus de AB donne une des racines de l'équation, enſuite

enſuite en commençant au point B on diviſera la circonférence en cinq parties égales BC, CD, DE, EF, FB, & les coſinus des arcs AC, AD, ADE, ADF donneront les autres valeurs de la racine c. D'où il ſuit qu'en nommant C la circonférence, & A l'arc AL, l'équation $c^v = 16c^5 - 20c^3 + 5c$ donnera les coſinus des cinq arcs ſuivants $\frac{A}{5}$, $\frac{C+A}{5}$, $\frac{2C+A}{5}$, $\frac{3C+A}{5}$, $\frac{4C+A}{5}$.

En voici la raiſon. Le coſinus c^v de l'arc AL appartient non-ſeulement à cet arc AL, mais à tout autre arc terminé par les points A, L; c'eſt-à-dire à l'arc AL + la circonférence, à l'arc AL + deux fois la circonférence, &c. Donc la racine c doit exprimer le coſinus de la cinquieme partie de chacun de ces arcs.

On voit auſſi par la diviſion du cercle, qu'il ne peut y avoir que ces cinq valeurs: car en procédant au-delà, on retrouveroit les mêmes racines. En effet le coſinus de $\frac{5C+A}{5}$ ou $C+\frac{A}{5}$ eſt le même que le coſinus de $\frac{A}{5}$; le coſinus de $\frac{6C+A}{5}$, ou $C+\frac{C+A}{5}$ eſt le même que le coſinus de $\frac{C+A}{5}$, &c.

LVII.

REMARQUE 4. Le coſinus c^v appartient non-ſeulement à l'arc AL, mais encore à ſon complément AEL, ou $C-A$; & ce même coſinus appartient auſſi à l'arc $C-A$ augmenté ſucceſſivement de C, $2C$, $3C$. Donc les racines c exprimeront encore les coſinus de $\frac{C-A}{5}$, $\frac{2C-A}{5}$, $\frac{3C-A}{5}$, &c. mais ces racines ſeront les mêmes qui ont

été trouvées ci-devant. Car le cosinus de $\frac{C-A}{5}$ est le même que le cosinus de $\frac{4C+A}{5}$, parce que ces deux arcs ensemble font la circonférence entiere. De même le cosinus de $\frac{2C-A}{5}$ est le même que celui de $\frac{3C+A}{5}$, &c. & ainsi de suite.

LVIII.

Il en est de même pour toutes les autres équations aux cosinus, soit que l'arc AL soit moindre ou plus grand qu'un quart de cercle, de sorte que si λ marque le nombre des parties dans lesquelles l'arc AL est divisé, les racines de ces équations seront les cosinus des arcs $\frac{A}{\lambda}$, $\frac{C-A}{\lambda}$, $\frac{C+A}{\lambda}$, $\frac{2C-A}{\lambda}$, $\frac{2C+A}{\lambda}$, $\frac{3C-A}{\lambda}$, $\frac{3C+A}{\lambda}$, &c. & ces arcs se trouveront en divisant la circonférence en autant de parties égales que λ contient d'unités, en commençant au point B, AB étant supposé égal à $\frac{AL}{\lambda}$.

LIX.

COROLL. 5. Si on suppose dans les équations précédentes le cosinus de $AL = -1$, c'est-à-dire que l'arc AL devient égal à la demie circonférence, ou que ce cosinus $= 1$, c'est-à-dire que l'arc AL devient égal à la circonférence entiere; dans ces deux cas, en divisant la circonférence comme nous avons enseigné dans le Corollaire précédent, les arcs des divisions paires de la premiere figure seront égaux aux arcs des divisions de la seconde, en supposant que le nombre λ soit le même de part & d'autre.

Fig. 12.

Fig. 13.

Si λ eſt un nombre impair dans le premier cas, & un nombre pair dans le ſecond, le dernier des arcs eſt marqué par $\frac{C}{2}$; donc la valeur d'un des coſinus ſera égal à -1.

LX.

COROLL. 6. En ſuppoſant que les quantités a, b, h, k, &c. ſont les racines des équations aux coſinus, a ſera le coſinus de $\frac{A}{5}$, b celui de $\frac{C+A}{5}$, h ſera celui de $\frac{2C+A}{5}$, k celui de $\frac{3C+A}{5}$, &c. & les équations aux coſinus ſeront compoſées du produit des quantités $c-a$, $c-b$, $c-h$, $c-k$, &c. Les principes ordinaires de l'Algebre feront aiſément connoître le nombre des racines poſitives & celui des négatives; & comme les ſeconds termes manquent dans toutes les équations aux coſinus, il s'enſuit, comme on le ſait, que la ſomme des racines ou des coſinus poſitifs, eſt égale à la ſomme des coſinus négatifs.

LXI.

LEMME 6. Si dans un cercle quelconque $AGSO$ décrit du centre C, on tire deux diametres AS, GO perpendiculaires l'un à l'autre; qu'on prenne ſur la circonférence un arc AL dont le coſinus ſoit nommé t, & l'arc $AB = \frac{AL}{\lambda}$; qu'on diviſe la circonférence, en commençant au point quelconque B, en un nombre de parties égales marqué par λ, comme BF, FI, IP, &c. ſi outre cela on prend un point quelconque K, dans le diametre AS duquel on mene à tous les points de diviſion les lignes

Lemme qui prépare au théorême de M. Cotes ſur la diviſion des arcs de cercle.

Fig. 14.

KB, KF, KI, KP, &c. je dis qu'on aura $\overline{KB}^2 \times \overline{KF}^2 \times \overline{KI}^2 \times \overline{KP}^2 \times$ &c. $= CA^{2\lambda} - 2t \times CK^{\lambda} + \overline{CK}^{2\lambda}$, ſi l'arc AL eſt moindre que AG; & $= CA^{2\lambda} + 2t \times CK^{\lambda} + CK^{2\lambda}$, ſi l'arc AL eſt plus grand que AG, mais moindre que AGS.

DÉMONST. Soit tiré le rayon BC & BN perpendiculaire au diametre AS, ſuppoſant toujours le rayon $= 1$, on nommera CK x, & a, b, h, k, &c. les coſinus des arcs AB, AF, AI, AP, &c. c'eſt-à-dire $\frac{A}{\lambda}$, $\frac{C+A}{\lambda}$, $\frac{2C+A}{\lambda}$, &c. & on aura $KB^2 = BN^2 + KN^2 = 1 - aa + \overline{a-x}^2 = 1 - 2ax + xx$: de même $\overline{KF}^2 = 1 - 2bx + xx$, ſi les arcs AB, AF ſont terminés dans la demie circonférence GAO du même côté que le point K; on a auſſi $KI^2 = 1 + 2hx + xx$, $KP^2 = 1 + 2kx + xx$. Suppoſons à préſent $1 - 2ax + xx = 0$, & faiſons la même ſuppoſition pour les autres valeurs, on aura $a = \frac{1+xx}{2x}$; $b = \frac{1+xx}{2x}$; $-h = \frac{1+xx}{2x}$; $-k = \frac{1+xx}{2x}$. Donc on aura généralement $c = \frac{1+xx}{2x}$. Si on tranſpoſe maintenant tous les termes des équations trouvées aux coſinus (Art. LIII.) du même côté du ſigne d'égalité, enſorte qu'elles deviennent $= 0$, & qu'on ſubſtitue dans ces équations la valeur de c, elles deviendront celles-ci.

$$\frac{1-2cx+xx}{2x} = 0. \qquad \frac{1-2c^{IV}x^4+x^8}{2x^4} = 0.$$

$$\frac{1-2c''x^2+x^4}{2x^2} = 0 \qquad \frac{1-2c^{V}x^5+x^{10}}{2x^5} = 0.$$

$$\frac{1-2c'''x^3+x^6}{2x^3} = 0 \qquad \frac{1-2c^{VI}x^6+x^{12}}{2x^6} = 0$$

&c.

Or c, c'', c''', &c. marquent le cosinus de l'arc AL que nous avons nommé t dans ce Lemme : on aura donc cette équation générale $\frac{1-2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}{2x^{\lambda}}=0$ lorsque AL est plus petit que AG; & lorsque AL est plus grand que AG, $\frac{1+2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}{2x^{\lambda}}=0$. Mais les équations aux cosinus sont composées du produit des racines $c-a=0$, $c-b$, $c+h$, $c+k$; donc l'équation générale $\frac{1\mp 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}{2x^{\lambda}}=0$ est aussi formée du produit des racines $\frac{1+xx}{2x}-a=0$, $\frac{1+xx}{2x}-b=0$, $\frac{1+xx}{2x}+h=0$, $\frac{1+xx}{2x}+k=0$. Donc $1\mp 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}=\overline{1-2ax+xx}\times\overline{1-2bx+xx}\times\overline{1+2hx+xx}\times\overline{1+2kx+xx}$, &c. donc enfin $AC^{2\lambda}\mp 2t\times CK^{\lambda}+CK^{2\lambda}=KB^{2}\times KF^{2}\times KI^{2}\times KP^{2}$, &c.

LXII.

COROLL. Il suit de ce Lemme, qu'on peut par la seule division d'un arc de cercle en parties égales assigner tous les facteurs trinomes de $x^{2m}+px^{m}+q$, qu'on voit être la même quantité que $1\pm 2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}$ en supposant $t=\frac{p}{2}$, $q=a^{2m}$, & regardant alors a comme le rayon $=1$. Il faut bien faire attention à ce Corollaire ; il sera d'usage dans la suite.

LXIII.

THEOREME 3. Si on divise une circonférence de cercle $ADFA$ en arcs égaux AB, BO, OD, DE, EF, &c. Fig. 15

dont le nombre ſoit égal à 2λ, & que d'un point quelconque K pris dans le diametre AF, on tire des lignes KA, KB, KO, KD, &c. à tous les points de diviſion, on aura $CA^{\lambda} - CK^{\lambda} = KA \times KO \times KE \times KG$, & $CA^{\lambda} + CK^{\lambda} = KB \times KD \times KF \times KH$, &c. en prenant ainſi ces lignes alternativement.

Démonſtration du Théoréme de M. Cotes.

DÉMONST. 1°. Si on ſuppoſe $t = 1$ l'arc AL devient égal à la circonférence entiere ; par conſéquent l'arc $AO = \frac{C}{\lambda}$: & ſi en commençant au point O, on diviſe la circonférence en un nombre de parties égales deſigné par λ aux points E, G, I, &c. A, le dernier point de diviſion ſera toujours A, & les coſinus des arcs AO, AE, AG, AI, &c. (Art. LX.) ſeront égaux à a, b, h, k, &c. 1 ; or on aura dans le cas préſent $1 - 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda} = 1 - 2x^{\lambda} + x^{2\lambda}$, dont la racine quarrée eſt $1 - x^{\lambda}$; donc on a (Lemme 6.) $1 - x^{\lambda} = \sqrt{1 - 2ax + xx} \times \sqrt{1 - 2bx + xx} \times \sqrt{1 + hx + xx} \times \sqrt{1 + 2kx + xx} \times \sqrt{1 - 2x + xx}$, c'eſt-à-dire $CA^{\lambda} - CK^{\lambda} = KO \times KE \times KG \times KI$, &c. $\times KA$.

Fig. 13. Fig. 15.

Fig. 12. Fig. 15.

2°. Si on ſuppoſe $t = -1$, l'arc AL devient égal à la demie circonférence ; par conſéquent l'arc $AB = \frac{\frac{1}{2}C}{\lambda}$: & ſi du point B on diviſe la circonférence en un nombre de parties égales marqué par λ aux points D, F, H, &c. les coſinus des arcs AB, AD, AF, AH, &c. étant exprimés par les quantités a, b, h, k, &c. on aura dans le cas préſent $1 - 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda} = 1 + 2x^{\lambda} + x^{2\lambda}$, dont la racine quarrée eſt $1 + x^{\lambda}$; ce qui donne (Art. LXI.)

$1 + x^{\lambda} = \sqrt{1 - 2ax + xx} \times \sqrt{1 - 2bx + xx} \times \sqrt{1 + 2hx + xx} \times \sqrt{1 + 2kx + xx}$, c'eſt-à-dire $CA^{\lambda} + CK^{\lambda} = KB, \times KD, \times KF, \times KH.$

Donc en réuniſſant les deux cas de $t = 1$, & de $t = -1$, on a $CA^{\lambda} - CK^{\lambda} = KA \times KO \times KE \times KG$, &c. & $CA^{\lambda} + CK^{\lambda} = KB \times KD \times KF \times KH$.

LXIV.

REMARQUE. Le Théorême précédent eſt le fameux Théorême de M. Cotes. Il a été rendu plus général par M. Moivre, comme on le voit dans ſon Livre intitulé: *Miſcellanea analytica de ſeriebus & quadraturis.* Ce Théorême dont l'auteur n'avoit pas donné la démonſtration, a été démontré par l'illuſtre Jean Bernoulli, voy. Tome IV. de ſes Œuvres, N°. CLX, & par M. Herman dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Peterſbourg, tom. VI. Au reſte la maniere dont il eſt ici démontré, m'a paru la plus ſimple & la plus claire. Je l'ai tirée du Livre de Dom Charles Walmeſley déja cité Art. LIII.

LXV.

COROLLAIRE 1. Il n'eſt pas difficile d'appliquer ce Théorême à des cas particuliers, en donnant à λ telle valeur qu'on voudra. Par exemple, prenons d'abord la premiere ſuppoſition de $t = 1$, & ſoit $\lambda = 5$: diviſant la circonférence en cinq parties égales aux points B, F, D, E, A, on aura à cauſe de $KB = KE$ & de $KF =$

Application du Théorême précédent à des cas particuliers.

Fig. 13.

$KD, CA^5 - CK^5 = KB^2 \times KF^2 \times KA$; c'eſt-à-dire $1 - x^5 = \overline{1 - x} \times \overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 + 2bx + xx}$. On trouveroit de même les valeurs de $1 - x^\lambda$ en ſuppoſant $\lambda = 6, 7$, &c.

2°. Lorſque $t = -1$, en ſuppoſant auſſi $\lambda = 5$, on trouvera $1 + x^5 = \overline{1 + x} \times \overline{1 - 2ax + xx} \times \overline{1 + 2bx + xx}$.

LXVI.

COROLLAIRE 2. Il ſuit du Théorême & du Corollaire précédens, qu'on trouve aiſément par la diviſion d'un arc de cercle les facteurs de $\pm x^n \pm a^n$, en ſuppoſant a égal au rayon qui eſt $= 1$.

CHAPITRE V.

Sur les Imaginaires.

LXVII.

NOus allons démontrer ici deux Propoſitions générales & du plus grand uſage ſur les imaginaires, la premiere, que toute quantité imaginaire d'une forme quelconque peut toujours ſe réduire à $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles. La ſeconde, que toute racine imaginaire d'une équation quelconque peut s'exprimer auſſi par $A + B\sqrt{-1}$.

LXVIII.

Démonſtration de la premiere Partie.

LEMME. Si $K + H\sqrt{-1} = L + P\sqrt{-1}$; $K, H, L,$ &

& P étant des quantités réelles, je dis que $K=L$ & $H=P$. Lemme préparatoire.

Car puiſque $K-L+(H-P)\sqrt{-1}=0$, il s'enſuit que $K-L=0$ & $H-P=0$; autrement ſoit $K-L=R$, & $H-P=S$, on auroit $R+S\sqrt{-1}=0$, c'eſt-à-dire le réel R égal à l'imaginaire $-S\sqrt{-1}$, ce qui eſt abſurde.

LXIX.

COROLLAIRE. Donc quand une quantité eſt égale à zéro, & qu'elle eſt compoſée de pluſieurs termes, les uns réels, les autres multipliés par $\sqrt{-1}$, les deux parties ſont chacune en particulier égales à zéro.

LXX.

THÉOREME 1. Une quantité algébrique quelconque, compoſée de tant d'imaginaires qu'on voudra, peut toujours ſe ramener à la forme $A+B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles quelconques. Expreſſion générale que l'on peut donner à toute quantité imaginaire d'une forme quelconque.

DÉMONSTRATION. 1°. Il eſt évident que $a+b\sqrt{-1}\pm g+h\sqrt{-1}$ peut ſe ramener à la forme $A+B\sqrt{-1}$; car $a+b\sqrt{-1}\pm g\pm h\sqrt{-1}=a\pm g+(b\pm h)\sqrt{-1}=A+B\sqrt{-1}$, en ſuppoſant $a\pm g=A$, & $b\pm h=B$.

2°. $(a+b\sqrt{-1})\times(g+h\sqrt{-1})$ peut ſe ramener à $A+B\sqrt{-1}$. Car $(a+b\sqrt{-1})\times(g+h\sqrt{-1})=\begin{matrix}ag+bg\sqrt{-1}\\-bh+ah\sqrt{-1}\end{matrix}$. Donc $ag-bh=A$, & $bg+ah=B$.

3°. $A+B\sqrt{-1}=\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}}$. Car $\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})\times(g-h\sqrt{-1})}{(g+h\sqrt{-1})\times(g-h\sqrt{-1})}=\frac{\begin{matrix}ag+bg\sqrt{-1}\\+bh-ah\sqrt{-1}\end{matrix}}{gg+hh}$. Or dans cette

quantité ainſi réduite $\frac{ag+bh}{gg+hh} = A$, & $\frac{bg-ah}{gg+hh} = B$, Donc, &c.

4°. $\overline{a+b\sqrt{-1}}^{g+h\sqrt{-1}} = A+B\sqrt{-1}$. Car ſuppoſant que cela ſoit ainſi, on a par les logarithmes, $l\,\overline{a+b\sqrt{-1}}^{g+h\sqrt{-1}} = l(A+B\sqrt{-1})$; ou $\overline{g+h\sqrt{-1}}\; l(a+b\sqrt{-1}) = l(A+B\sqrt{-1})$. Donc en prenant les différentielles logarithmiques, faiſant varier A, B & a, b, & ſuppoſant $g+h\sqrt{-1}$ conſtante, ce qui eſt permis, on a (N) $(g+h\sqrt{-1}) \times \left(\frac{da+db\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}\right) = \frac{dA+dB\sqrt{-1}}{A+B\sqrt{-1}}$. De plus on a $(g+h\sqrt{-1}) \times \left(\frac{da+db\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}\right) = (g+h\sqrt{-1}) \times \frac{(da+db\sqrt{-1})\cdot(a-b\sqrt{-1})}{(a+b\sqrt{-1})\cdot(a-b\sqrt{-1})} =$ en mettant d'une part tout ce qui eſt réel, & de l'autre tout ce qui eſt imaginaire $= \frac{gada+gbdb-ahdb+bhda}{aa+bb} + \frac{(hada+hbdb+gadb-gbda)\sqrt{-1}}{aa+bb}$. Faiſant la même opération ſur le ſecond membre de l'équation (N), nous avons $\frac{dA+dB\sqrt{-1}}{A+B\sqrt{-1}} = \frac{(dA+dB\sqrt{-1})\cdot(A-B\sqrt{-1})}{(A+B\sqrt{-1})\cdot(A-B\sqrt{-1})} = \frac{AdA+BdB}{AA+BB} \times \frac{(AdB-BdA)\sqrt{-1}}{AA+BB}$, donc $\frac{gada+gbdb-ahdb+bhda+(hada+hbdb+gadb-gbda)\sqrt{-1}}{aa+bb} = \frac{AdA+BdB+(AdB-BdA)\sqrt{-1}}{AA+BB}$. Or il faut (Art. LXVIII.) que la partie réelle du premier membre ſoit égale à la partie réelle du ſecond, & la partie imaginaire, à la partie imaginaire. Nous aurons donc les deux équations ſuivantes, (O) $\frac{gada+gbdb-ahdb+bhda}{aa+bb} = \frac{AdA+BdB}{AA+BB}$: & (P) $\frac{(hada+hbdb+gadb-gbda)\sqrt{-1}}{aa+bb} = \frac{(AdB-BdA)\sqrt{-1}}{AA+BB}$.

Donc (Q) $\frac{AdA+BdB}{AA+BB} = g \times \left\{\frac{ada+bdb}{aa+bb}\right\} - h \times$

$\left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}$. Or $\int \frac{AdA+BdB}{AA+BB} = l\sqrt{AA+BB}$, comme il eſt aiſé de le prouver en différentiant le ſecond membre de cette équation. De même $\int g \times \left\{\frac{ada+bdb}{aa+bb}\right\}$. $= g\, l\sqrt{aa+bb} = l\sqrt{aa+bb}^{g}$; & $\int -h \times \left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}$ (en multipliant par 1, ou par $lc = 1$) $= -h\int \left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}$ $\times\, lc = lc^{-h\int \left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}}$. Donc en rapprochant les deux membres de l'équation (Q) ainſi intégrés, on a $l\sqrt{AA+BB} = l\sqrt{aa+bb}^{g} + lc^{-h\int \left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}}$; donc repaſſant des logarithmes aux nombres, on a $\sqrt{AA+BB} = \sqrt{aa+bb}^{g} \times c^{-h\int \left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}}$.

Faiſons à préſent la même opération ſur l'équation (P), que nous venons de faire ſur l'équation (O) ; cette équation (P) devient en diviſant par $\sqrt{-1}$ de part & d'autre & réduiſant (R) $\frac{AdB-BdA}{AA+BB} = h \times \left\{\frac{ada+bdb}{aa+bb}\right\} + g \times \left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}$. Mais $\int \left\{\frac{AdB-BdA}{AA+BB}\right\} =$ (corol. Art. XLIII.) un angle dont la tangente eſt $\frac{B}{A}$; $\int h \times \left\{\frac{ada-bdb}{aa+bb}\right\}$ $= hl\sqrt{aa+bb}$, & $\int g \times \left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\} = g$ multiplié par un angle dont la tangente eſt $\frac{b}{a}$. Donc en rapprochant les deux membres ainſi intégrés de l'équation (R) on a (S) $\int \left\{\frac{AdB-BdA}{AA+BB}\right\} = hl\sqrt{aa+bb} + g \times \int \left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}$. D'autre part nous avons trouvé plus haut $\sqrt{AA+BB} = (aa+bb)^{\frac{g}{2}} \times c^{-h\int \left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}}$; nous ſavons auſſi que $\int \left\{\frac{AdB-BdA}{AA+BB}\right\}$ & $\int \left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}$ ſont des expreſſions d'angles dont les tangentes ſont $\frac{B}{A}$ & $\frac{b}{a}$. Donc parce que (Art. XL.) la tangente d'un angle eſt

le ſinus de cet angle diviſé par ſon coſinus, B eſt le ſinus; & A le coſinus d'un angle dont la valeur eſt $h l \sqrt{aa+bb} + g \times \int \left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}$, & dont le rayon $\sqrt{AA+BB}$ eſt $= (aa+bb)^{\frac{g}{2}} \times c^{-h\int\left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}}$. Dans cette expreſſion $c^{-h\int\left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}}$ (Art. xxx.) eſt l'ordonnée d'une logarithmique dont la ſous-tangente $= 1$, & dont l'abſciſſe négative $= -h\int\left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}$, c'eſt-à-dire que cette ordonnée eſt plus petite que l'unité.

Donc enfin $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$ peut ſe ramener à $A+B\sqrt{-1}$, puiſque pour avoir A & B il ne faut que prendre un cercle dont le rayon ſoit égal à la valeur trouvée & toute réelle de $\sqrt{AA+BB}$; & prendre ſur la circonférence de ce cercle un angle égal à la valeur auſſi trouvée de $\int\left\{\frac{AdB-BdA}{AA+BB}\right\}$; $\frac{B}{A}$ ſera la tangente de cet angle; B en ſera le ſinus, & A le coſinus. Donc, &c.

On ſait donc réduire à la forme $A+B\sqrt{-1}$, A & B étant réels.

1°. $a+b\sqrt{-1} \pm g \pm h\sqrt{-1}$

2°. $(a+b\sqrt{-1}) \times (g+h\sqrt{-1})$

3°. $\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}}$

4°. $\frac{}{a+b\sqrt{-1}}^{g+h\sqrt{-1}}$

Donc une quantité algébrique quelconque compoſée de tant d'imaginaires qu'on voudra, peut toujours ſe ramener à $A+B\sqrt{-1}$, A & B étant réels. *C. Q. F. P.*

LXXI.

Par le moyen du Théorême précédent il ſera toujours

facile de réduire à la forme $A+B\sqrt{-1}$ une quantité composée de tant & de telle sorte d'imaginaires qu'on voudra. Car en allant de la droite vers la gauche on fera évanouir l'un après l'autre tous les radicaux excepté un seul. La quantité se ramenera donc à $A+B\sqrt{-1}$. Conséquence du Théorême précédent.

LXXII.

Lorsque le signe radical sera différent de $\sqrt{-1}$, il n'y aura pas pour cela de difficulté : car $\sqrt[4]{-1} = (\sqrt[2]{-1})^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[6]{-1} = (\sqrt[2]{-1})^{\frac{1}{3}}$, &c. Après cette petite observation il est aisé d'appliquer notre formule à quelque exemple que ce soit. Application à quelques exemples.

Ainsi nous ramenerons facilement $\sqrt[2m]{-c}$, à la forme $A+B\sqrt{-1}$. Car $\sqrt[2m]{-c} = \sqrt[m]{\sqrt[2]{-c}} = \sqrt[m]{\sqrt{c}} \times \sqrt{-1} = c^{\frac{1}{2m}} \times \sqrt[2m]{-1} = (c^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$. Or en comparant cette quantité ainsi réduite avec $\overline{a+b\sqrt{-1}}^{g+h\sqrt{-1}}$, on voit que,

$$h = 0$$
$$g = \tfrac{1}{m}$$
$$c^{\frac{1}{2}} = b$$
$$a = 0$$
$$c = aa+bb$$
$$\frac{b}{a} = \infty$$

la tangente . . . . . .

donc l'angle $\int\left\{\frac{adb-bda}{aa+bb}\right\}$ sera droit. Il s'ensuit donc de là que B & A sont les sinus & cosinus d'un angle dont le rayon $= c^{\frac{1}{2m}}$, & qui est à l'angle droit, ou à 5, ou à 9, ou à 13, &c. angles droits, comme $\frac{1}{m}$ est à 1.

LXXIII.

De même $\overline{a+b\sqrt{-1}}^{g}$ rentre dans le cas précédent en faiſant $h=0$. Cette quantité peut donc être ſuppoſée $=A+B\sqrt{-1}$, en prenant B & A pour les ſinus & coſinus d'un angle dont le rayon $=(aa+bb)^{\frac{g}{2}}$, & qui ſoit à l'angle dont b & a ſont les ſinus & coſinus, comme 9 eſt à 1. Donc ſi $g=\frac{1}{n}$, n étant un nombre entier quelconque, il y aura un nombre n de quantités telles que $A+B\sqrt{-1}$, qui étant élevées à la puiſſance n rendront $a+b\sqrt{-1}$. Car il y a un nombre n d'angles différens dont b & a ſont les ſinus & coſinus, ſavoir A, $C+A$, $2C+A$, &c.

LXXIV.

Soit encore propoſé de mettre $\sqrt[6]{\frac{a+b\sqrt[4]{-1}}{g+h\sqrt[8]{-1}}\cdot(m+n\sqrt[6]{-1})} \times \left\{\frac{k+q\sqrt[4]{-1}}{r+s\sqrt[10]{-1}}\right\}$ ſous la forme $A+B\sqrt{-1}$. En allant de la droite vers la gauche, je commence par $r+s\sqrt[10]{-1}$ que je mets ſous la forme ſuivante $r+s\sqrt[2]{-1}^{\frac{1}{5}}$. Cette quantité ſous cette forme ſe rapporte à $\overline{a+b\sqrt{-1}}^{g+h\sqrt{-1}}$ dans laquelle $a=r$, $h=0$, $b=s$, $g=\frac{1}{5}$: or nous venons de démontrer que cette derniere imaginaire ſe ramenoit à $A+B\sqrt{-1}$. Donc, &c. J'opere de même ſur $k+q\sqrt[4]{-1}=k+q\sqrt[2]{-1}^{\frac{1}{2}}=$ par la même raiſon que la précédente $A+B\sqrt{-1}$. Ce membre devient donc $\frac{a'+b'\sqrt{-1}}{a''+b''\sqrt{-1}}$ quantité qui ſe rapporte à $\frac{a+b\sqrt{-1}}{g+h\sqrt{-1}}$ que

nous avons vu ſe ramener à $A+B\sqrt{-1}$ (Art. LXX. N°. 3.)

Nous avons donc déja $\sqrt[6]{\frac{a+b\sqrt[4]{-1}}{g+h\sqrt[8]{-1}}}\cdot(m+n\sqrt[6]{-1})\times(\alpha+\zeta\sqrt{-1})$. De même $m+n\sqrt[6]{-1}=m+n\sqrt[3]{-1}^{\frac{1}{3}}$, & $a+b\sqrt[4]{-1}=a+b\sqrt{-1}^{\frac{1}{2}}$, & $g+h\sqrt[8]{-1}=g+h\sqrt{-1}^{\frac{1}{4}}$. On aura donc en faiſant les mêmes raiſonnemens que ci-deſſus $(p+q\sqrt{-1})\times(m'+n'\sqrt{-1}^{\frac{1}{6}}=(p'+q'\sqrt{-1})^{\frac{1}{6}}$: or cette quantité ſe rapporte à $\overline{a+b\sqrt{-1}}^{g+h\sqrt{-1}}$ dans laquelle $a=p'$, $b=q'$, $g=\frac{1}{6}$, $h=0$

Donc ce premier membre ſe ramene auſſi à $\alpha'+\zeta'\sqrt{-1}$: on aura donc $(\alpha'+\zeta'\sqrt{-1})\cdot(\alpha+\zeta\sqrt{-1})$. Or nous avons vu (Art. LXX. N°. 2.) que $(a+b\sqrt{-1})\cdot(g+h\sqrt{-1})$ ſe ramenoit à $A+B\sqrt{-1}$: donc la propoſée entiere ſe ramenera à $A+B\sqrt{-1}$.

LXXV.

La ſeconde propoſition, ſavoir que toute racine imaginaire d'une équation quelconque peut s'exprimer par $A+B\sqrt{-1}$, paroît une ſuite néceſſaire de la premiere; cependant elle a beſoin d'une preuve particuliere. Car quoique nous ayons démontré que toute quantité imaginaire peut ſe réduire à $A+B\sqrt{-1}$, on pouroit douter qu'il en fût de même des racines imaginaires des équa- Démonſtration de la ſeconde Partie.

tions, parce qu'on pouroit croire que du moins dans certains cas ces racines n'auroient aucune expreſſion analytique poſſible. Mais les Théorêmes ſuivans ne laiſſeront aucune difficulté ſur cette ſeconde propoſition.

LXXVI.

Lemmes préparatoires à cette démonſtration.

LEMME I. Dans une courbe dont z & u ſont les coordonnées, on peut ſuppoſer $z = Du^k + Cu^{k+p}$, &c. u étant fort petite, quoique finie; & dans ce cas u étant ſoit poſitive, ſoit négative, cette ſerie repteſentera la valeur de z.

DÉMONST. Soit $z^m + bz^{m-1}u + \ldots + Kz + gu + F = 0$, l'équation de la courbe : je dis d'abord qu'on aura aiſément la valeur de z en u, lorſque u eſt fort petite. Car ayant diſpoſé cette équation ſur le Parallelograme de M. Newton, ou ſur le Triangle analytique de M. l'Abbé de Gua, de la maniere enſeignée par M. Cramer (Analyſe des lignes courbes, Chap. III. p. 54.) on trouvera chaque terme de l'équation de z en u l'un après l'autre, & on aura $z = Du^k + Cu^{k+p} +$, &c. Cela poſé, je dis que ſi u eſt fort petite, cette ſerie repreſentera la valeur de z, ſoit que u ſoit poſitive, ſoit que u ſoit négative.

Car 1°. lorſque u eſt poſitive & fort petite, il eſt évident que la valeur de z en u ſera une ſuite extrêmement convergente, dont les termes commencent, au moins à une certaine diſtance du premier, à ne contenir que des puiſſances

puiſſance poſitives de u ; autrement elles n'iroient pas en augmentant, ce qui ſeroit contre la ſuppoſition & contre la maniere dont la ſerie a été formée. Donc ſi on ſubſtitue à la place de z ſa valeur en u dans l'équation de la courbe, plus la valeur ſubſtituée de z aura de termes, plus les puiſſances de u ſeront hautes dans les termes qui reſteront après avoir effacé ceux qui ſe détruiſent ; & ainſi le réſultat de la ſubſtitution approchera d'autant plus d'être nul, qu'on prendra plus de termes pour la valeur de z. Donc u étant poſitive & très-petite, quoique finie, la ſerie $z = Du^k + Cu^{k+p} +$, &c. repréſentera d'autant plus exactement la valeur de z, qu'on y prendra plus de termes, & pourra en approcher d'auſſi près qu'on voudra. Donc cette ſerie exprime la valeur de z.

2°. Il en ſera de même, ſi en faiſant u négative dans l'équation de la courbe, on y ſubſtitue la valeur de z répondante à u négative. Car plus cette valeur ſubſtituée aura de termes, plus les puiſſances de $-u$ ſeront hautes dans les termes reſtans après la ſubſtitution. Or ſi on cherche une quantité $A + B\sqrt{-1} = (-Du)^k$, k exprime un expoſant fractionnaire d'un degré pair, on trouvera facilement (Art. LXXII.) que A & B ſont des quantités réelles du même nombre de dimenſions que Du^k. Donc ſi on ſubſtitue dans ces termes reſtans, à la place des puiſſances de $-u$, leurs valeurs $A + B\sqrt{-1}$, & qu'on partage le réſultat en deux quantités ſéparées, l'une toute réelle, & l'autre multipliée par $\sqrt{-1}$; chacune

de ces quantités ſera d'autant plus petite, & approchera d'autant plus de zéro, que l'on prendra plus de termes pour la valeur de z. Donc u étant négative & très-petite, quoique finie, la ſerie qui exprime la valeur de z répondante à $-u$ eſt d'autant plus exacte qu'on y prend plus de termes. Donc cette ſerie eſt la vraie valeur de z, quoiqu'imaginaire.

Or tous les termes réels de la ſerie précédente peuvent ſe repréſenter par une quantité finie & réelle M; & chacun des termes imaginaires, ſelon ce qui a été dit plus haut, peut ſe repréſenter par $G+H\sqrt{-1}$, G & H étant des quantités réelles. Donc la ſomme des termes réels & des termes imaginaires, c'eſt-à-dire la ſerie entiere que donne u négative, peut ſe repréſenter par $A+B\sqrt{-1}$.

LXXVII.

COROLLAIRE. Donc on peut toûjours ſuppoſer à u priſe négativement quelque valeur finie, telle que z ſoit $= A+B\sqrt{-1}$.

LXXVIII.

SCHOLIE. Nous remarquerons ici en paſſant que lorſque u eſt infiniment petite, il ne ſuffit pas, comme quelques Auteurs l'ont cru, de prendre un ſeul terme de la ſerie pour exprimer la valeur de z. Car ſoit, par exemple, $z = u^2 + \sqrt{u^5}$ l'équation d'une courbe, il eſt viſible que u étant négative, z eſt imaginaire, parce que $\sqrt{u^5}$ eſt imaginaire; mais ſi on négligeoit abſolument le terme

$\sqrt{u^3}$, u étant infiniment petite, on auroit $z = u^2$, & par conſéquent on trouveroit z réelle, u étant négative, ce qui n'eſt pas. M. d'Alembert eſt le premier qui ait fait cette importante remarque dans les Mém. de l'Acad. de Berlin 1746, & qui ait par là invinciblement établi l'exiſtence des points de rebrouſſement de la ſeconde eſpece que d'habiles Géometres avoient conteſtée. Mrs Cramer & Euler ont depuis traité la même matiere; l'un dans ſon Introduction à l'Analyſe des lignes courbes, l'autre dans les Mém. Acad. de Berlin 1749.

LXXIX.

LEMME 2. Soit a la valeur de l'abſciſſe dans une courbe géométrique; lorſque l'ordonnée paſſe du réel à l'imaginaire, on pourra toujours ſuppoſer à l'abſciſſe une valeur $a+b$, telle que l'ordonnée correſpondante ſoit $A+B\sqrt{-1}$; b étant une quantité qui peut être très-petite, mais toujours finie.

DÉMONST. Soit $x^m + hx^{m-1}y \ldots + y + K = 0$ l'équation d'une courbe TV, ſoit .... $AP = y$ Fig. 16

$PM = x$

ſoit auſſi T le point où les ordonnées deviennent imaginaires, & ſoient ..... $TV = u$

$AS = a$

$ST = 6$

$MV = z$

On aura $AS - AP = PS = TV = u$, & $6 - x = z$;

donc l'équation de la courbe rapportée aux coordonnées TV, VM, ſera $z^m + Bz^{m-1} + \ldots\ldots + Kz + gu + F = 0$. Donc faiſant TV, u, négative & très-petite, s'il eſt néceſſaire, par exemple $= TO$, l'ordonnée au point O ſera $= A + B\sqrt{-1}$; donc l'ordonnée au point L ſera $= \epsilon + A + B\sqrt{-1}$. Car en tranſportant l'axe TV en AS, on ne fait qu'augmenter de la quantité conſtante & réelle $ST = \epsilon$, toutes les ordonnées MV de la courbe, ſoit réelles, ſoit imaginaires : or les ordonnées imaginaires qui répondent à TO négative & finie, mais très-petite, s'il eſt néceſſaire, peuvent être ſuppoſées $= A + B\sqrt{-1}$ (Art. LXXVII.). Donc les ordonnées imaginaires répondantes à AL ſont $ST + A + B\sqrt{-1}$. Donc depuis le point S au moins juſqu'à une certaine diſtance finie L, les ordonnées peuvent être repréſentées par $G + H\sqrt{-1}$.

Donc en général dans toute courbe, AP étant $= q$, & $PM = p$, ſi S eſt le point, où p ceſſe d'être réelle, paſſé ce point, au moins juſqu'à une certaine diſtance L, on pourra ſuppoſer $p = k + i\sqrt{-1}$.

LXXX.

Seconde propoſition démontrée.

THÉOREME 2. Soit un multinome quelconque $x^m + hx^{m-1} + lx^{m-2} + \ldots\ldots + fx + g = 0$, tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui ſubſtituée à la place de x faſſe évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité $m + n\sqrt{-1}$ à ſubſtituer à la place de x qui rendra ce multinome $= 0$, m & n étant des quantités réelles.

Toute racine imaginaire d'une équation quelconque peut ſe repréſenter par $A + B\sqrt{-1}$.

DÉMONST. A la place du dernier terme g de cette équation, ſoit miſe une indéterminée y, enſorte que $x^m + hx^{m-1} \ldots + y = 0$ ſoit l'équation d'une courbe MT dans laquelle l'abſciſſe AP (y) peut toujours être ſuppoſée réelle, & dans laquelle la valeur de x en y ſera ou réelle ou imaginaire. Soit fait $x = p + q\sqrt{-1}$, p & q étant des indéterminées quelconques réelles ou imaginaires, & d'une forme tout-à-fait inconnue, on aura en ſubſtituant cette valeur de x une équation qui contiendra trois indéterminées p, q, y: on pourra donc changer & ſéparer l'équation précédente en deux autres quelconques à volonté; pour plus de commodité, je la ſépare en deux autres, dont l'une renferme tous les termes où ne ſe trouve point $\sqrt{-1}$, & l'autre tous ceux où $\sqrt{-1}$ ſe trouve; & cette derniere étant diviſée par $\sqrt{-1}$, on aura les deux équations ſuivantes; $p^m + rp^{m-2}q^2 + \ldots + y = 0$, & $q^{m-1} + \ldots + s = 0$. Or ces deux équations peuvent ſe changer en deux autres, dont l'une renferme y & p, & l'autre y & q. Nous enſeignerons plus bas (Art. LXXXVIII.) d'après les Auteurs d'Algebre comment ſe fait cette opération; mais il nous ſuffit à préſent qu'on puiſſe la faire, & la ſuppoſer faite. Cela poſé, je dis que p & q auront toujours quelque valeur réelle. Fig. 17.

Car 1°. il eſt évident que depuis S juſqu'en L, p & q auront une valeur réelle, puiſque (Lemme précédent), depuis S juſqu'en L, on a $x = A + B\sqrt{-1}$: donc $p = A$, & $q = B$.

2°. Suppoſons que paſſé le point L, p & q ceſſent d'avoir des valeurs réelles, dans ce cas on aura (Art. LXXIX.) depuis L juſqu'à une certaine diſtance K, par exemple, $p = k + i\sqrt{-1}$, & $q = g + h\sqrt{-1}$. Donc $x = k + g + (i+h)\sqrt{-1}$: donc $p = k + g$ & $q = i + h$; donc la ſuppoſition qu'on avoit faite que p & q ceſſoient d'avoir des valeurs réelles en L, eſt une ſuppoſition fauſſe.

En continuant le même raiſonnement, on trouvera que par-delà le point L & tout le long de la ligne SQ, p & q ſeront réelles. Donc quelque valeur qu'on ſuppoſe à y, la valeur imaginaire correſpondante de x ſera $= p + q\sqrt{-1}$; donc ſi $y = g$, la valeur correſpondante de x ſera $m + n\sqrt{-1}$, m & n étant réelles. Donc ſi $x^m + hx^{m-1} \ldots\ldots + g = 0$ a une racine imaginaire, cette racine ſera $= m + n\sqrt{-1}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE. Donc $x^m + hx^{m-1} + \ldots\ldots + g = 0$ pourra être diviſé par $x - m - n\sqrt{-1}$. Car en faiſant la diviſion, il eſt toujours poſſible de parvenir à un reſte r dans lequel il n'y ait plus de x, puiſque x ne monte qu'au premier degré dans le diviſeur $x - m - n\sqrt{-1}$; & ſi on nomme Q le quotient, il eſt évident que $Qx - Qm - Qn\sqrt{-1} + r = 0$ ſera une quantité égale & identique au multinome propoſé. Donc ſubſtituant dans cette quantité $m + n\sqrt{-1}$ à la place de x, le réſultat doit être $= 0$; donc $Qm + Qn\sqrt{-1} - Qm - Qn\sqrt{-1} + r = 0$, donc $r = 0$; or r ne contient point x; donc ſi $r = 0$, c'eſt parce que réellement la diviſion s'eſt faite ſans reſte.

LXXXI.

THÉOREME 3. Si un multinome tel que celui du Théorême précédent peut ſe diviſer par $m+n\sqrt{-1}$, il aura en même temps pour diviſeur exact $m-n\sqrt{-1}$.

DÉMONST. Ce Théorême ſera prouvé, ſi on fait voir que $m+n\sqrt{-1}$ ſubſtituée à la place de x, faiſant évanouir tous les termes du multinome, il en ſera de même de $m-n\sqrt{-1}$.

Pour le démontrer & rendre la démonſtration plus ſenſible, ſoit l'équation $x^2+hx+g=0$ que je ſuppoſe avoir pour diviſeur exact, ou pour racine $m+n\sqrt{-1}$, en ſubſtituant pour x ſa valeur $m+n\sqrt{-1}$, il viendra $\begin{matrix} mm+2mn\sqrt{-1}-nn \\ +hm+hn\sqrt{-1}+g \end{matrix}=0$. Cette équation ſous cette forme a, comme on voit, deux parties, l'une compoſée de termes réels, ſavoir $mm+hm-nn+g$, l'autre compoſée de termes tous imaginaires $2mn\sqrt{-1}+hn\sqrt{-1}$: de plus chacune de ces parties eſt $=0$ (Art. LXIX.) On voit auſſi que dans la partie formée de termes tous réels, il n'y a que des puiſſances paires de n, & dans la partie formée de termes imaginaires, toutes les puiſſances de n ſont impaires, & de plus cette ſeconde équation contient $n\sqrt{-1}$ à tous ſes termes: par conſéquent on la peut diviſer par $n\sqrt{-1}$. Or le quotient de cette diviſion ne contiendra que des puiſſances paires de n, ainſi que la premiere partie. Donc on auroit également ces deux équations, en ſubſtituant $-n$ au lieu de $+n$. Donc on y parviendroit de

même en ſubſtituant pour x, $m-n\sqrt{-1}$ au lieu de $m+n\sqrt{-1}$. Donc ſi le multinome eſt diviſible par $m+n\sqrt{-1}$, il l'eſt en même temps par $m-n\sqrt{-1}$. *C. Q. F. P.*

LXXXII.

Toute équation ayant des racines imaginaires eſt réductible en facteurs trinomes réels.

COROLLAIRE. Donc les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans les Théorêmes précédens, le multinome pourra toujours ſe diviſer en facteurs trinomes réels $xx+fx+g$, $xx+lx+i$, dont les coefficiens ſeront réels. Car puiſque ce multinome peut ſe diviſer par $x-m-n\sqrt{-1}$ & $x-m+n\sqrt{-1}$, il pourra auſſi ſe diviſer par leur produit $xx-2mx+mm+nn$ qui eſt un facteur tout réel; & faiſant ſur le quotient qui en proviendra les mêmes raiſonnemens qu'on a faits ſur le multinome, on prouvera qu'il peut auſſi ſe diviſer par un facteur trinome réel, & ainſi de ſuite.

LXXXIII.

SCHOLIE. Juſqu'à préſent on n'avoit encore démontré la propoſition générale du Corollaire précédent que pour les ſeuls cas ſuivans: 1°. pour les cas de $x^{2\lambda}+2tx^{\lambda}+1$, & pour celui de $x^n \pm a^n$ qui revient au cas de $1 \pm x^{\lambda}$ en ſuppoſant $a=1$, cas dont nous avons parlé (Art. LXII. & LXVI.) 2°. Pour le cas où le multinome eſt du 3e. degré, ou du 4e. ou du 5e. En effet lorſque le multinome eſt 1°. du 3e. degré, on ſait, & nous le démontrerons plus bas (Art. LXXXV.) pour une équation impaire d'un degré quelconque, on ſait, dis-je, que ce multinome a au moins un

un facteur réel. Soit ce facteur $x+a$, en diviſant le multinome par ce facteur, on aura l'autre facteur $xx+px+q$ dont les coefficiens ſeront réels. 2°. Si le multinome eſt du 4e. degré $x^4+bx^3+cx^2+ex+q$, ou plutôt en faiſant évanouir le ſecond terme $x^4+qxx+rx+s$, ſuppoſons qu'on prenne $xx+ex+f$, $xx-ex+g$ pour les deux facteurs, on trouvera (Arith. univerſ. p. 210.)

$$e^6+2qe^4+qqee-rr-4see=0$$

$$f=\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}$$

$$g=\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}$$

Or l'équation e^6+2qe^4, &c. étant une équation du 3e degré dont ee eſt l'inconnue, aura au moins une racine réelle, & le ſigne — du dernier terme fait connoître (Art. LXXXVI.) que cette racine réelle ſera poſitive. Donc e aura pour le moins deux racines réelles, l'une poſitive & l'autre négative. Donc puiſqu'on a une valeur de f & de g en e, les quantités f & g ſeront auſſi réelles. Donc dans $xx+ex+f$, $xx-ex+g$, les coefficiens e, f, g ſeront des quantités réelles.

3°. Enfin lorſque le multinome eſt du 5e degré, comme il y a ſûrement un facteur réel $x+a$, l'autre facteur ſera du 4e degré, ce qui revient au cas précédent.

LXXXIV.

D'où eſt tirée la théorie précédente.

AVERTISSEMENT. La théorie précédente ſur les imaginaires eſt tirée d'un Mémoire de M. d'Alembert qui ſe trouve dans le ſecond volume des Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1746. J'ai étendu ſes démonſtrations, & je leur ai donné la forme que j'ai cru la plus propre pour les mettre à la portée de tout le monde. M. Euler dans les Mémoires de l'Académie de Berlin 1749. a traité la même matiere des racines imaginaires des équations par une méthode différente, mais plus longue. Il y a joint une méthode pour changer les quantités imaginaires en $A+B\sqrt{-1}$ qui eſt la même que celle de M. d'Alembert.

CHAPITRE VI.

Démonſtration de quelques Propoſitions ſuppoſées plus haut, & d'autres néceſſaires dans ce Traité.

LXXXV.

Toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle.

THÉOREME. DAns une équation quelconque d'un degré impair il y a toujours au moins une racine réelle.

DÉMONST. Soit l'équation $x^{2m+1} + Ax^{2m} + \ldots\ldots + q = 0$, m eſt un nombre entier pair. Au lieu de faire le premier membre de cette équation égal à zéro, je le ſuppoſe $= y$; $x^{2m+1} + Ax^{2m} + q = y$ ſera l'équation

d'une courbe dans laquelle le point où $y = 0$, donnera la valeur de x. Cela posé, soit la ligne ABK l'axe de cette courbe, le point K l'origine des x. Il faut prouver que la courbe coupera son axe en un point : car alors il y aura nécessairement une valeur de x réelle, au point où $y = 0$. Or supposons x positive & infinie, y le sera aussi, puisqu'elle sera alors $= x^{2m+1}$, & la courbe passera par l'extrémité de l'ordonnée PM. Si nous faisons à présent x négative & infinie, y sera infinie & $= -x^{2m+1}$, c'est-à-dire négative. Donc y après avoir été positive & infinie, lorsque $x = \infty$, sera négative & infinie, lorsque x sera négative & infinie. Or la courbe pBP est continue, puisqu'à chaque valeur de x répond une valeur de y. Donc la courbe coupera nécessairement son axe en quelque point B pour passer du positif au négatif pA. Donc l'équation a au moins une valeur réelle. Fig. 18.

LXXXVI.

COROLL. 1. On démontrera de la même maniere cette proposition connue dans tous les livres d'Algebre, mais qui y est autrement prouvée, & souvent assez mal ; que toute équation d'un degré impair dont le dernier terme est affecté du signe —, a au moins une racine positive.

LXXXVII.

Les racines imaginaires vont toujours en nombre pair.

COROLL. 2. Par le moyen du Théorême précédent, & des deux derniers Théorêmes du Chapitre V. on peut dé-

montrer que les imaginaires vont toujours en nombre pair; propoſition d'un très-grand uſage, mais encore aſſez mal prouvée dans tous les livres d'Algebre.

LXXXVIII.

Solution de quelques problémes néceſſaires.

PROBLEME I. Deux équations qui renferment deux indéterminées A & B étant données, les réduire à deux autres, dont l'une ne contienne que A, & l'autre ne contienne que B, avec des conſtantes quelconques.

SOLUTION. Soient ordonnées ces équations par rapport à A, il eſt évident qu'elles fourniront chacune une ou pluſieurs valeurs de A en B & en conſtantes. Or parmi les valeurs de A en B que fourniſſent la premiere & la ſeconde équations, il y en doit avoir au moins quelques-unes de communes, puiſque les deux équations ſont ſuppoſées avoir lieu à la fois : par conſéquent ces deux équations doivent avoir quelques diviſeurs communs. Je cherche donc leur plus grand commun diviſeur, ce que je fais de la maniere enſeignée dans tous les livres d'Algebre. Je pouſſe la diviſion juſqu'à ce que je ſois parvenu à un reſte qui ne contienne plus d'A. Je fais ce reſte $= 0$, ce qui doit être pour qu'il y ait un commun diviſeur: de là je tire une équation en B. J'ordonne enſuite les deux équations par rapport à B, & je fais les mêmes raiſonnemens & les mêmes opérations pour avoir une équation en A.

LXXXIX.

PROBLEME 2. Trouver la valeur de x dans une équation quelconque en ſuppoſant qu'elle a des racines imaginaires.

SOLUTION. 1°. Soit cette équation $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots\ldots + r = 0$. D'abord ſi cette équation a des racines réelles, je les trouve par une conſtruction géométrique. Suppoſons que ces valeurs ſoient a, b, c, &c. je diviſe l'équation par $x - a$, $x - b$, $x - c$, &c. & je parviens à un reſte qui ne contient plus que des racines imaginaires. Dans ce cas nous avons démontré (Art. LXXX.) qu'on peut toujours ſuppoſer $x = A + B\sqrt{-1}$. Je mets dans l'équation à la place de x ſa valeur $A + B\sqrt{-1}$; il me viendra deux parties, l'une toute réelle, & l'autre toute imaginaire, toutes deux néceſſairement égales à zéro chacune en particulier (Art. LXIX.). Je diviſe la partie imaginaire par $\sqrt{-1}$ qui eſt à tous ſes termes : j'aurai alors deux équations qui ne contiendront plus d'imaginaires, & qui auront deux inconnues A & B que je trouverai par le problême précédent. Premiere méthode pour réſoudre ce probléme.

2°. Quoique les racines ſoient imaginaires, l'équation eſt toujours diviſible par un facteur trinome $xx + px + q$, p & q étant réelles (Art. LXXXII.). Soit donc faite la diviſion à la maniere ordinaire, on arrivera à un reſte où x ne ſe trouvera plus qu'au premier degré. Soit $Rx + S$ ce reſte, il doit être égal à zéro, & cette égalité à zéro Seconde méthode pour réſoudre le même probléme.

ne doit point dépendre de la valeur de x, puiſque quelle que ſoit x, le multinome $x^m \ldots + r$ eſt toujours diviſible par $xx + px + q$. Donc l'égalité à zéro ne viendra point de ce que x ſera $= -\frac{S}{R}$, mais de ce qu'on aura en particulier $R = 0$, & $S = 0$. Or les quantités S & R ne contiennent plus que p & q avec des conſtantes ; on aura donc deux équations qu'on réduira l'une en p, & l'autre en q, dans leſquelles équations p & q auront au moins quelques valeurs réelles, qu'on trouvera alors comme à l'ordinaire.

FIN DE L'INTRODUCTION.

Fig. 2.

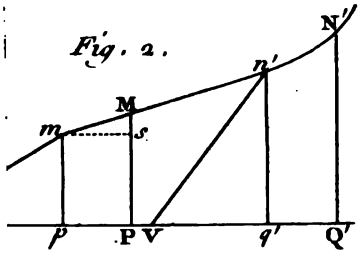


Fig. 3.

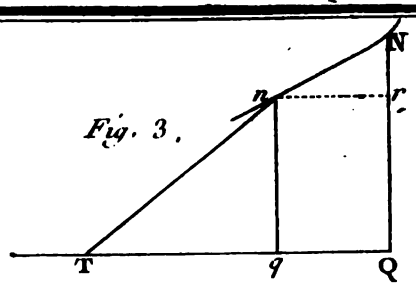


Fig. 6

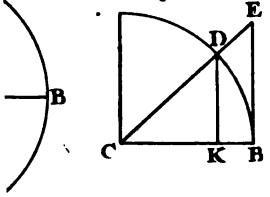


Fig. 7.

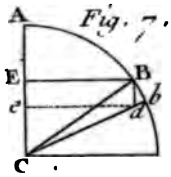


Fig. 8.

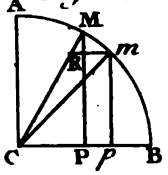


Fig. 10.

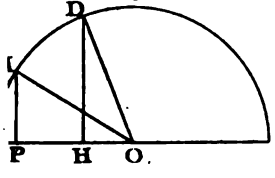


Fig. 11.

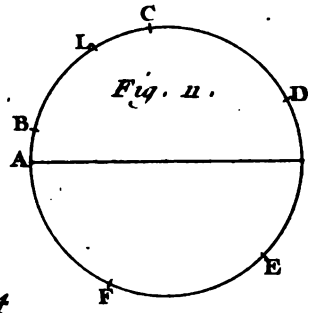


Fig. 13

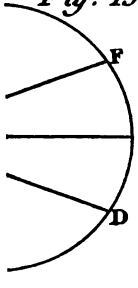


Fig. 14

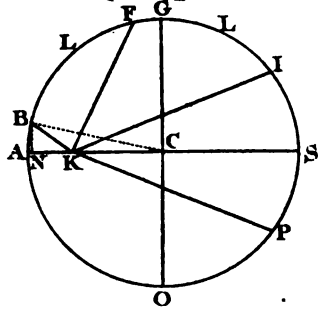


Fig. 15

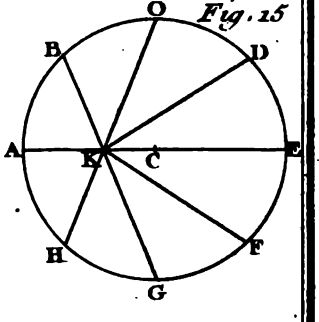


Fig. 17.

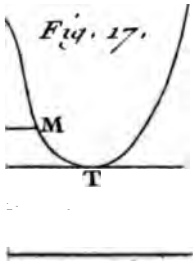
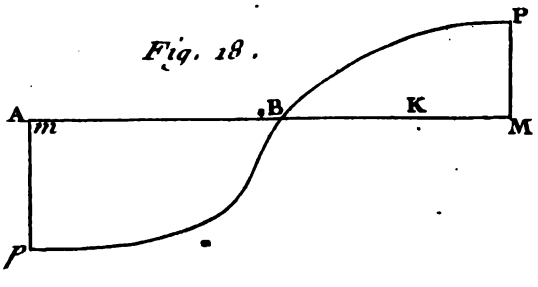


Fig. 18.



TRAITÉ
DU
CALCUL INTÉGRAL.

PREMIERE PARTIE.

De l'Intégration des différentielles qui n'ont qu'une ſeule changeante.

CHAPITRE PREMIER.

Expoſition & application de la regle fondamentale de tout le Calcul Intégral.

I.

Enoncé de la regle fondamentale.

QUAND on a une différentielle incomplexe qui n'a qu'une changeante x multipliée ou diviſée par des conſtantes quelconques, voici ce que l'on doit pratiquer pour en avoir l'intégrale.

Il faut 1°. effacer dx ; 2°. augmenter d'une unité l'expoſant de la changeante ; 3°. diviſer le tout ainſi préparé par cet expoſant augmenté de l'unité. Cette opération donnera l'intégrale cherchée.

II.

Son application 1°. à un exemple général incomplexe.

Je ſuppoſe qu'on ait à intégrer $ax^m\,dx$ (a eſt une conſtante quelconque, & m eſt un expoſant quelconque). Suivant la regle précédente j'efface dx; j'augmente l'expoſant m d'une unité, ce qui donne ax^{m+1}; je diviſe par $m+1$, j'ai $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$. C'eſt l'intégrale cherchée.

DÉMONST. Je prends ſuivant les regles du calcul différentiel la différence de $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$; cette différence eſt $\frac{(m+1)\,.\,ax^{m+1-1}\,dx}{m+1} = ax^m\,dx$. Donc, &c.

On trouvera de même que l'intégrale de $mx^{m-1}\,dx$ eſt $\frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1} = x^m$.

III.

Cas unique qui peut faire quelque difficulté.

SCHOLIE 1. Il n'y a qu'un ſeul cas qui puiſſe faire quelque difficulté, c'eſt celui où l'on auroit $x^{-1}\,dx$, ou $\frac{dx}{x}$. En ſuivant notre regle on trouve pour intégrale de cette différentielle $\frac{x^0}{0}$; or cette intégrale eſt égale à l'infini, ce qui ſe marque ainſi $\frac{x^0}{0} = \infty$. La méthode paroît donc ne rien donner dans ce cas. Mais nous avons vu dans l'Introduction (Art. XVIII.) que $\frac{dx}{x}$ eſt une différentielle logarithmique, dépendante par conſéquent, ainſi que nous l'y avons expliqué, de la conſtruction de la logarithmique, ou, ce qui eſt la même choſe (Art. XVI. de l'Introduction) de la quadrature de l'hyperbole équilatere.

Solution de ce cas.

IV.

IV.

SCHOLIE 2. Donc l'intégrale de $-\frac{dx}{x}$ est $-lx$, ou ce qui revient au même, log. $\frac{1}{x}$, ce qu'on peut voir de plusieurs manieres : car on a par les regles connues des logarithmes, log. $\frac{1}{x}$ = log. 1 — log. x = (Art. v. Introduction) 0 — log. x = — log. x.

On peut encore s'en assurer en différentiant log. $\frac{1}{x}$; on trouvera (Art. XVIII. Introduction) que sa différence est $d\left(\frac{1}{x}\right)$ divisé par $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire $-\frac{dx}{xx}$ divisé par $\frac{1}{x}$; or $-\frac{dx}{xx}$ divisé par $\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x}$.

V.

COROLLAIRE 1. Donc toutes les fois qu'une différentielle est composée d'un seul terme, il est facile d'en avoir l'intégrale par notre regle; comme aussi lorsqu'elle est composée de plusieurs termes dont chacun n'a qu'une seule changeante élevée dans ce terme à une puissance quelconque. Par exemple, soit donné $3bx^2dx + cx^3dx + 2c^3ydy - ffppdz$. Dans ce cas chaque terme s'integre séparément par notre regle fondamentale, comme s'il étoit seul. Ainsi l'intégrale de la proposée est $bx^3 + \frac{cx^4}{4} + c^3yy - ffppz$; la preuve en est évidente; puisqu'en différentiant cette intégrale on retrouve la différentielle proposée.

2°. Application à des différentielles complexes.

VI.

COROLL. 2. Si l'on a pour différentielles des fractions

3°. Application aux fractions.

qui n'aient que des conſtantes au dénominateur, on en trouvera de même les intégrales. Ainſi $\frac{(ax^m + px^{p-1})dx}{aa+bb}$ a pour intégrale $\frac{\frac{ax^{m+1}}{m+1} + x^p}{aa+bb}$.

De même $\int \frac{b^3 x dx + 2c^4 y v dy}{a} = \frac{b^3 x^2}{2a} + \frac{2c^4 y^3}{3a}$.

Tout cela eſt fondé ſur ce que les conſtantes doivent ſe retrouver dans l'intégrale comme elles étoient dans la différentielle, par la raiſon que quand on différentie une quantité, on ne touche point aux conſtantes.

VII.

Il peut encore arriver qu'une fraction qui a une changeante à ſon dénominateur s'integre par la premiere regle. Ainſi $\frac{-dx}{xx} = -x^{-2}dx$ a pour intégrale en ſuivant cette regle $\frac{1}{x}$; de même $\int \frac{-dx}{x^3} = \frac{1}{2xx}$. Et en général ſi j'ai $\frac{dx}{x^m} = x^{-m}dx$; ſuivant la regle précédente j'efface dx; j'augmente l'expoſant $-m$ d'une unité, je diviſe le tout par $-m+1$, j'ai $\int \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{-(m-1).x^{m-1}}$.

VIII.

4°. Aux différentielles affectées de ſignes quelconques.

Sous quelle condition.

COROLL. 3. On integre encore par la regle fondamentale, lorſqu'une fonction de x & dx eſt multipliée par une quantité ſous un ſigne quelconque, & que la grandeur hors du ſigne eſt le produit d'une conſtante quelconque par la différentielle de la grandeur qui eſt ſous le ſigne.

Par exemple, ſoit propoſé $\frac{1}{2}(a^2dx + 2bxdx) \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$; dans cette quantité la grandeur hors du ſigne $\frac{1}{2}(a^2dx + 2bxdx)$ eſt le produit du coefficient conſtant $\frac{1}{2}$ par $a^2dx + 2bxdx$ différentielle de la quantité $a^2x + bx^2$ qui eſt ſous le ſigne; je dis donc que ſuivant la regle fondamentale, l'intégrale de cette quantité eſt $\frac{1}{3}.\overline{a^2x + bx^2}^{\frac{3}{2}}$. Car ſuivant cette regle j'augmente d'une unité l'expoſant $\frac{1}{2}$ qui devient alors $\frac{3}{2}$, je diviſe la différentielle par $\frac{3}{2}$ multiplié par la différentielle $a^2dx + 2bxdx$ de $aax + bxx$, le quotient $.\frac{1}{3}\overline{a^2x + bx^2}^{\frac{3}{2}}$ eſt l'intégrale cherchée.

IX.

La raiſon de cette regle eſt bien ſimple; car ſoit ſuppoſé $aax + bxx = y$, on aura $\frac{1}{2}(a^2dx + 2bxdx) \times (a^2x + bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}dy \times y^{\frac{1}{2}}$. Ainſi il faut faire ſur la quantité donnée les mêmes opérations qu'on feroit ſur $\frac{1}{2}dy.y^{\frac{1}{2}}$ pour en trouver l'intégrale.

Cette regle pourra paroître embarraſſante à pluſieurs de nos lecteurs, qui craindront de ne pas démêler aiſément les différentielles qui ſeront dans le cas dont il s'agit: mais au moyen des *transformations* dont nous parlerons dans la ſuite, la pratique en deviendra beaucoup plus facile.

X.

Autre cas dans lequel on integre par la regle fondamentale.

COROLL. 4. Quand une différentielle dx eſt multipliée par la puiſſance d'une grandeur complexe rationnelle, ou

qui n'a que des conſtantes au dénominateur; que l'expoſant de la puiſſance eſt un nombre entier poſitif, & qu'il n'y a qu'une changeante x, on en trouve l'intégrale par notre regle, en élevant la grandeur complexe à cette puiſſance, & multipliant chaque terme par dx, & prenant enſuite l'intégrale de chacun. Que l'on ait $dx \cdot \overline{a+bx^2}^2$, cette différentielle devient, en ſuivant ce que nous venons de dire, $a^2dx + 2abxdx + bbx^2dx$, dont chaque terme s'integre par la regle fondamentale.

XI.

Formule pour ce dernier cas.

En général toutes les fois qu'on aura $hx^k dx \cdot \overline{e+cx^q}^\alpha$, en ſuppoſant α un nombre entier poſitif, & q, k, des nombres quelconques, entiers ou rompus, poſitifs ou négatifs, il eſt aiſé d'en avoir l'intégrale finie & exacte par la premiere regle. Pour cela il ne faut qu'élever $e+cx^q$ à la puiſſance dont l'expoſant eſt α, ſuivant la formule connue des Géometres pour l'élévation d'un binome à une puiſſance quelconque; multiplier chaque terme de cette ſuite qui ſera toujours terminée, par $hx^k dx$, & prendre l'intégrale de chacun (Coroll. 1.). Dans le cas préſent en pratiquant cette opération, on a $\int hx^k dx \cdot \overline{e+cx^q}^\alpha$

$= (W) \frac{he^\alpha x^{k+1}}{k+1} + \frac{\alpha he^{\alpha-1}}{k+1+q} \times cx^{k+1+q} +$

$\frac{\alpha \cdot \frac{(\alpha-1)}{2} \cdot he^{\alpha-2} ccx^{k+1+2q}}{k+1+2q} +$ &c.

XII.

SCHOLIE 3. Il y a cependant un cas à obſerver ici à cauſe de quelques difficultés qu'il peut faire naître, c'eſt le cas où $\frac{k+1}{-q}$ ſeroit égal à un nombre entier poſitif. Car alors le dénominateur de quelqu'un des termes de la ſerie devient $= 0$; par exemple, ſi on ſuppoſe $\frac{k+1}{-q} = 2$, on aura $k + 1 + 2q = 0$, ce qui rend le troiſieme terme de la ſerie $= \infty$. Alors donc elle ne nous fait rien connoître.

Difficulté qui peut s'y trouver quelquefois.

XIII.

Cependant cette difficulté ne ſubſiſte pas, toutes les fois que α eſt $< \frac{k+1}{-q}$; car alors la ſerie eſt finie avant qu'on en ſoit venu au terme dont le dénominateur ſeroit $= 0$.

Solution de cette difficulté.

La difficulté n'a donc lieu que lorſque $\alpha =$ ou eſt $> \frac{k+1}{-q}$; alors même il eſt aiſé de la lever. Car le terme dont le dénominateur ſera $= 0$ après l'intégration, contiendra avant l'intégration une différentielle logarithmique, intégrable par conſéquent en ſuppoſant la quadrature de l'hyperbole. En effet, l'expoſant de la puiſſance de x dans chaque terme eſt le même que le dénominateur de ce même terme; le terme où ce dénominateur ſera $= 0$ ſera donc $\frac{x^0}{0}$, ou (Art. III.) $\int \frac{dx}{x}$.

XIV.

Tout cela peut ſe démontrer ſans avoir recours à notre

Démonſtration de cette ſolution.

ſerie. Car ſoit $\frac{k+1}{-q}$ égal au nombre entier poſitif m, on a $k = -qm-1$, & $hx^k dx \cdot \overline{e+cx^q}^{\alpha} = hx^{-qm-1} dx \cdot \overline{e+cx^q}^{\alpha}$. Ou ſi on éleve $e+cx^q$ à la puiſſance α, on formera un polinome qui contiendra les puiſſances x^q, x^{2q}, x^{3q}, &c. de x juſqu'à $x^{\alpha q}$ incluſivement, & il eſt viſible qu'en multipliant chaque terme de ce polinome par $hx^{-qm-1} dx = \frac{h dx}{x^{qm+1}}$, il eſt viſible, dis-je, que ſi $\alpha =$ ou eſt $> m \left\{\frac{k+1}{-q}\right\}$, il y aura quelqu'un des termes où la différentielle ſe réduira à $\frac{dx}{x}$.

XV.

REMARQUE GÉNÉRALE. Tout le calcul intégral eſt fondé ſur cette premiere regle que nous venons d'établir; ſavoir la regle pour intégrer $x^m dx$. Mais toutes les différentielles ne s'appliquent pas auſſi aiſément à cette regle, que celles que nous venons d'examiner. Il en eſt qu'on n'a pu parvenir encore à y réduire. De plus parmi celles mêmes qui ſont intégrables, beaucoup ſont très-compliquées. En quoi donc conſiſte l'art du Calcul intégral? c'eſt à préparer ces quantités, de façon qu'on les amene à l'expreſſion la plus ſimple qu'elles puiſſent avoir. Or pour cela les Analyſtes ont imaginé pluſieurs transformations. Nous allons les développer ici en les réduiſant à des cas généraux.

CHAPITRE II.

Méthode pour faciliter l'intégration d'un grand nombre de différentielles par le moyen de différentes transformations.

XVI.

LA premiere transformation dont nous allons parler ici, a lieu pour les différentielles affectées de radicaux, ou élevées à des puiſſances dont les expoſans ſont négatifs, pourvu qu'en ce cas la quantité hors du ſigne ſoit la différentielle même de la quantité ſous le ſigne, ou lui ſoit proportionnelle. Cette transformation conſiſte 1°. à partager la différentielle donnée en deux parties ou facteurs, dont l'un ſoit dx & l'autre la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne; 2°. à faire cette derniere quantité égale à une ſeule changeante z; 3°. à différentier l'équation qui réſulte de cette transformation; 4°. enfin à mettre dans la propoſée au lieu de x & de dx leurs valeurs en z & en dz. Cette opération donne une expreſſion plus ſimple débarraſſée de radicaux dont l'intégrale ſe trouve par la premiere regle. Après l'avoir trouvée on y remettra les valeurs de z en x, & on aura l'intégrale cherchée.

Premiere transformation.

Conditions ſuivant leſquelles elle a lieu.

En quoi elle conſiſte.

Appliquons cette regle à quelques exemples.

XVII.

Soit $dx \cdot (a+bx)^p$ dont on cherche l'intégrale. Je

Premier exemple.

fais, ſuivant ce qui eſt dit ci-deſſus, $a+bx=z$; donc $dx=\frac{dz}{b}$, & $\overline{a+bx}^{p}=z^{p}$. J'ai donc la transformée $\frac{z^{p}\,dz}{b}$ dont l'intégrale eſt par la premiere regle $\frac{z^{p+1}}{(p+1).b}$. Remettant pour z ſa valeur $a+bx$, on aura $\frac{\overline{a+bx}^{p+1}}{(p+1).b}$: c'eſt l'intégrale cherchée.

XVIII.

Second exemple.

Si la propoſée étoit $xx\,dx\times(f+gx^{3})^{m}$, on feroit de même $f+gx^{3}=z$ ce qui donne $x^{2}dx=\frac{dz}{3g}$, $\overline{f+gx^{3}}^{m}=z^{m}$. La transformée eſt donc $\frac{z^{m}\,dz}{3g}$, dont l'intégrale eſt $\frac{z^{m+1}}{(m+1).3g}$. Subſtituons pour z^{m+1} ſa valeur $\overline{f+gx^{3}}^{m+1}$, l'intégrale de la propoſée eſt, comme on le voit $\frac{\overline{f+gx^{3}}^{m+1}}{(m+1).3g}$.

XIX.

REMARQUE. On auroit pu trouver l'intégrale des deux différentielles précédentes ſans ſe ſervir de transformation, par la ſeule premiere regle; car dans le premier exemple $dx.(a+bx)^{p}$ j'augmente l'expoſant p d'une unité, je diviſe la différentielle par cet expoſant $p+1$ multiplié par la différence $b\,dx$ de la changeante ſous le ſigne, j'ai le même réſultat que plus haut. Il en eſt de même pour la différentielle qui nous a ſervi de ſecond exemple. D'où l'on peut tirer une regle générale qui comprend toutes

toutes les différentielles qui ſont dans le cas des deux précédentes, c'eſt-à-dire toutes celles dans leſquelles l'expoſant de la changeante hors du ſigne eſt moindre d'une unité que celui de la changeante ſous le ſigne. Si l'on avoit, par exemple, à intégrer $\frac{aazdz}{(aa-zz)^{\frac{1}{2}}} = aazdz.(aa-zz)^{-\frac{2}{2}}$. Suivant la regle précédente j'augmente dans cette différentielle d'une unité l'expoſant -2, je diviſe par $-1 \times -2zdz$, il me vient $\frac{aa}{2.(aa-zz)}$, pour l'intégrale cherchée. Il en eſt ainſi pour toutes les autres différentielles compriſes dans la formule $x^{m-1}dx.(a+bx^m)^p$, m & p étant quelconques.

Regle générale pour un aſſez grand nombre de cas.

Mais il n'eſt pas toujours aiſé de voir les cas où la ſeule premiere regle ſuffit pour intégrer ces ſortes de différentielles. D'ailleurs par le ſecours de la transformation on s'évite la peine de faire cet examen, qui ſouvent eſt pénible.

XX.

Réduiſons la regle en formule, & rendons-la plus générale.

Formule pour la premiere transformation.

Toutes les fois qu'on a $(A)\ x^{rn} \times x^{n-1}dx.\overline{a+bx^n}^p$, p étant tout ce qu'on voudra, & r un nombre entier poſitif ou zéro, cette quantité eſt intégrable par notre transformation.

$x^{rn} \times x^{n-1} dx.(a+bx^n)^p$

XXI.

Premier cas. Lorſque $r =$ un nombre entier poſitif. Soit ſuivant ce que nous venons de dire $a+bx^n = z$, on

Démonſtration de cette formule.

Premier Cas. aura $x^n = \frac{z-a}{b}$, donc $x^{n-1}\,dx = \frac{dz}{nb}$. On a auſſi $x^{rn} = \overline{\frac{z-a}{b^r}}^r$, & $\overline{a+bx^n}^p = z^p$. Donc en mettant toutes ces valeurs dans (A) il viendra $(B)\ \frac{dz}{nb} \cdot z^p \cdot \left\{\frac{z-a}{b}\right\}^r$. Or dans cette formule $\frac{z-a}{b}$ élevée à la puiſſance r qui eſt ſuppoſé un nombre entier poſitif, donnera une ſuite finie de termes dont chacun ſera multiplié par z^p, & par $\frac{dz}{nb}$, & ſera par conſéquent intégrable par la premiere regle.

r = un nombre entier poſitif.

Pour le faire mieux ſentir, développons la ſerie précédente : nous aurons

$$\frac{\left(z^r - rz^{r-1}a + \frac{r\cdot(r-1)}{2}z^{r-2}a^2 - \frac{r\cdot(r-1)\cdot(r-2)}{2\cdot 3}z^{r-3}a^3 + \&c.\right)\frac{z^p\,dz}{nb}}{b^r}.$$

Suppoſons $r = 3$, on a $\frac{z^{p+3}\frac{dz}{nb} - 3az^{p+2}\frac{dz}{nb} + 3a^2z^{p+1}\frac{dz}{nb} - a^3z^p\frac{dz}{nb}}{b^3}$, différentielle dont l'intégrale ſe prend terme à terme (Art. VI.). Cette intégrale eſt $\frac{z^{p+4}}{(p+4)nb^4} - \frac{3az^{p+3}}{(p+3)nb^4} + \frac{3a^2z^{p+2}}{(p+2)nb^4} - \frac{a^3z^{p+1}}{(p+1)\cdot nb^4}$. Mettant enſuite pour z^{p+4}, z^{p+3}, &c. leurs valeurs en x, on aura l'intégrale cherchée.

XXII.

Application du premier Cas à un exemple.

Soit propoſé de trouver l'intégrale de cette différentielle $x^5\,dx\,(a+bx^3)^p = x^{1\times 3}\times x^2dx\cdot(a+bx^3)^p$, je vois d'abord que cette différentielle ſe rapporte au premier

cas de notre formule (A), r étant ici $= 1$. Je ſuis donc ſûr qu'elle eſt intégrable par notre transformation. En conſéquence je fais $a + bx^3 = z$, ce qui donne $x^3 = \frac{z-a}{b}$, & $x^2 dx = \frac{dz}{3b}$; donc la transformée eſt $\frac{z^p dz}{3b} \times \left\{\frac{z-a}{b}\right\}$ qui n'a plus aucune difficulté, ſe réſolvant par la premiere regle. Son intégrale eſt $\frac{z^{p+2}}{(p+2)3b^2} - \frac{az^{p+1}}{(p+1)3b^2}$. Le reſte de l'opération ſe fera comme dans les exemples précédens.

XXIII.

Si $r = 0$, on aura $x^{n-1} dx\,(a + bx^n)^p$ intégrable par la même transformation. Car ſoit $a + bx^n = z$, on aura $x^{n-1} dx = \frac{dz}{nb}$, & la différentielle ſe changera en $\frac{z^p dz}{nb}$. Donc, &c. 2°. Cas où $r = 0$.

XXIV.

COROLLAIRE 1. Si $n = 1$, & $r = q$, il vient $x^q dx \cdot (a + bx)^p$ intégrable, quelque valeur qu'on donne à p, q étant un nombre entier poſitif. Examen de quelques Cas particuliers.

XXV.

COROLL. 2. La différentielle $dx \times (ax^q + bx^s)^p$ ſe change en $dx \times \left\{x^q \times (a + bx^{s-q})\right\}^p = x^{qp} dx \cdot (a + bx^{s-q})^p$, ce qui ſe ramene à notre formule, toutes les fois qu'on peut ſuppoſer $s - q = n$ & $qp = rn + n - 1$.

Si l'expreſſion différentielle étoit $x^{m-1} dx \cdot (a + bx^n)^p$, & que $\frac{m}{n}$ fût un nombre entier poſitif, cette expreſſion

ſeroit la même que $x^{rn+n-1}\,dx\,.\,(a+bx^n)^p$, qu'on voit être la même choſe que la formule A. En effet, puiſque $\frac{m}{n}$ eſt un nombre entier, m doit être un multiple de n, qu'on peut ſuppoſer repréſenté par $r+1\,.\,n$. Donc, &c.

XXVI.

REMARQUE 1. Quelquefois dans les transformées il ſe trouve des termes de la forme de $\frac{dx}{x}$; alors c'eſt le cas de l'Art. III.

XXVII.

Autre maniere de ſe ſervir de la transformation précédente.

SCHOLIE. On peut encore ſe ſervir de la premiere transformation d'une maniere différente de celle dont nous l'avons employée.

Premier exemple.

Qu'on ait, par exemple, à intégrer $xx\,dx\sqrt{a+x}$, au lieu de faire $a+x=z$, je ſuppoſerai $\sqrt{a+x}=z$, ce qui donne $a+x=zz$; $dx=2z\,dz$; $xx=\overline{zz-a}^2$: faiſant les ſubſtitutions, on a $2z^2\,dz.(zz-a)^2$, c'eſt-à-dire $2z^6\,dz-4az^4\,dz+2aaz^2\,dz$, différentielle qui ſe rapporte au Coroll. 1. de la regle fondamentale. Intégrant & remettant enſuite dans l'intégrale trouvée les valeurs de z en x, on aura pour l'intégrale cherchée, $\frac{2}{7}.\overline{a+x}^{\frac{7}{2}}-\frac{4a}{5}.\overline{a+x}^{\frac{5}{2}}+\frac{2aa}{3}.\overline{a+x}^{\frac{3}{2}}$, ce qu'il eſt facile de vérifier. Car prenant la différentielle de cette intégrale, on a $\frac{2}{7}.\frac{7}{2}(a+x)^{\frac{5}{2}}\,dx-\frac{4a}{5}.\frac{5}{2}(a+x)^{\frac{3}{2}}\,dx+\frac{2aa}{3}.\frac{3}{2}(a+x)^{\frac{1}{2}}\,dx=(\overline{aa+2ax+xx}\sqrt{a+x}-\overline{2aa-2ax}\times\sqrt{a+x}+aa\sqrt{a+x})\,dx=$

(en effaçant ce qui se détruit) $xx\,dx\sqrt{a+x}$.

On trouveroit de la même maniere l'intégrale de $\frac{xx\,dx}{\sqrt{a+x}}$.

XXVIII.

Soit proposé d'intégrer $\overline{2\,adx - 4\,xdx}\,\sqrt{\overline{ax - xx + bb}}$ $= 2\,.\,\overline{adx - 2xdx}\,\sqrt{\overline{ax - xx + bb}}$, je fais $\sqrt{\overline{ax - xx + bb}} = z$, & $ax - xx + bb = zz$, & $adx - 2xdx = 2z\,dz$: faisant les substitutions, nous aurons pour transformée $4zz\,dz$ dont l'intégrale est $\frac{4}{3}z^3$, & remettant la valeur de z en x, l'intégrale de la proposée est $\frac{4}{3}(ax - xx + bb)^{\frac{3}{2}}$. On l'auroit trouvée de même par l'Art. VIII. Second exemple.

Par la même méthode on trouvera que l'intégrale de $\frac{2\,adx - 4\,xdx}{\sqrt{\overline{ax - xx + bb}}}$ est $4\,(ax - xx + bb)^{\frac{1}{2}}$.

XXIX.

Si la proposée étoit $2\,xdx\,.\,\left(\overline{xx + aa}^{\,2}\right)^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire $2\,xdx\,(xx + aa)^{\frac{2}{3}}$, on fera $xx + aa = z^{\frac{3}{2}}$, & $2\,xdx = \frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}dz$, & substituant il vient pour transformée $\frac{3}{2}z^{\frac{3}{2}}dz$, dont l'intégrale est $\frac{3}{5}z^{\frac{5}{2}}$. Donc $\int 2\,xdx\,(xx + aa)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}\,.\,\overline{xx + aa}\,\sqrt[3]{\overline{xx + aa}^{\,2}}$: ce qu'on trouveroit encore par l'Article VIII. Troisieme exemple.

XXX.

Si j'ai $\frac{2\,xdx}{\sqrt[3]{(xx + aa)^2}} = 2\,xdx \times \overline{xx + aa}^{-\frac{2}{3}}$, je fais $\overline{xx + aa}^{-\frac{1}{3}} = z$, donc $xx + aa = z^{-\frac{3}{2}}$, & $2\,xdx = -\frac{3}{2}z^{-\frac{5}{2}}dz$. Donc en substituant on a $-\frac{3}{2}z^{-\frac{3}{2}}dz$, Quatrieme exemple.

dont l'intégrale eſt (Regle premiere) $3z^{-\frac{1}{2}}$; donc l'intégrale de la propoſée eſt $3\sqrt[3]{xx+aa}$.

XXXI.

REMARQUE 2. Il y a bien des différentielles affectées de radicaux qui n'ont pas les conditions que nous avons énoncées, (Art. VIII.) qu'on peut cependant débarraſſer des ſignes radicaux dans certains cas. Mais pour cela il faut ſe ſervir de transformations différentes de celle que nous avons employée juſqu'ici. Par leur ſecours on ne trouvera pas toujours l'intégrale exprimée algébriquement; mais au moins ſerviront-elles à délivrer la différentielle de ſon radical, & à la rendre plus ſuſceptible des autres méthodes que nous enſeignerons dans la ſuite.

XXXII.

Seconde transformation appliquée à un exemple.

Soit propoſé d'intégrer $4xdx\sqrt{2ax-xx}$ différentielle qu'on voit bien n'être pas dans le cas de celles que nous avons traitées plus haut. Je fais $\sqrt{2ax-xx}=xz$, ou $\frac{xz}{a}$ (a eſt une conſtante que j'ajoute pour conſerver l'homogénéité.). Donc $2ax-xx=\frac{xxzz}{aa}$, & $2a-x=\frac{xzz}{aa}$, donc $x=\frac{2a^3}{a^2+zz}$, & $dx=\frac{-4a^3zdz}{(aa+zz)^2}$ & $\sqrt{2ax-xx}=\frac{2a^2z}{aa+zz}$: faiſant les ſubſtitutions, nous avons pour transformée $-\frac{64a^8zzdz}{(a^2+z^2)^4}$ différentielle exempte de radicaux, & que nous enſeignerons dans la ſuite à intégrer.

XXXIII.

Autre maniere d'intégrer la différentielle qui vient de ſervir d'exemple.

On peut encore intégrer la propoſée de cette autre maniere; la différentielle donnée étant $2.2xdx\sqrt{2ax-xx}$, je vois que ſi j'avois de plus $-4adx\sqrt{2ax-xx}$, la quantité hors du ſigne ſeroit le produit du coefficient -2 par la différentielle de la quantité ſous le ſigne, ce qui rentreroit dans notre premier cas (Art. VIII.). J'écris donc ainſi cette quantité $-2.(2adx-2xdx).(2ax-xx)^{\frac{1}{2}} + 4adx\sqrt{2ax-xx}$, qu'on voit bien être la même que la propoſée. Or dans cette différentielle la premiere partie $-2\times(2adx-2xdx).(2ax-xx)^{\frac{1}{2}}$ a pour intégrale (Art. VIII.) $-\frac{4}{3}.(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}$, & la ſeconde $4adx\sqrt{2ax-xx}$ dépend de la quadrature du cercle, comme nous l'expliquerons plus bas.

Il faut bien remarquer la maniere dont nous avons préparé cette quantité, avant de l'intégrer, pour l'appliquer aux cas ſemblables à celui-ci.

XXXIV.

Troiſieme transformation appliquée au même exemple.

En ſuppoſant toujours qu'on ait à intégrer $4xdx\sqrt{(2ax-xx)}$, je pourrois encore faire $a-x=u$, d'où je tirerois * $\sqrt{2ax-xx}=\sqrt{aa-uu}$, $dx=-du$; $4x=4a-4u$. Subſtituant donc on a $-4adu+4udu$

* Car puiſque $a-x=u$, $aa-2ax+xx=uu$; donc $-2ax+xx=uu-aa$, donc en changeant les ſignes $2ax-xx=aa-uu$; donc enfin $\sqrt{2ax-xx}=\sqrt{aa-uu}$. Il faut faire attention à cette équation : c'eſt une eſpece de formule dont les Géometres ſe ſervent ſouvent en pareil cas que celui-ci.

$\sqrt{aa-uu} = -2\times(2adu-2udu)\sqrt{(aa-uu)}$; dont la premiere partie $-2\times 2adu\sqrt{aa-uu}$ dépend de la quadrature du cercle, & la ſeconde $-2\times -2udu\sqrt{aa-uu}$ a pour intégrale exacte $-\frac{4}{3}.(aa-uu)^{\frac{3}{2}}$ (Art. VIII.).

XXXV.

Second exemple de la 2e. transformation.

Si la propoſée eſt $\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}}$ en faiſant $\sqrt{ax+xx}=\frac{xz}{b}$, on aura $ax+xx=\frac{xxzz}{bb}$, ou $a+x=\frac{xzz}{bb}$, donc $x=\frac{abb}{zz-bb}$; $\frac{xz}{b}$ ou $\sqrt{ax+xx}=\frac{abz}{zz-bb}$; $dx=-\frac{2abbzdz}{(zz-bb)^2}$; donc $\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}}=-\frac{2adz}{b}$: donc enfin $\int\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}}=-\frac{2az}{b}=\frac{-2a\sqrt{ax+xx}}{x}$.

XXXVI.

Quatrieme transformation.

Si l'on avoit $\frac{ydy}{\sqrt{yy+gy-gg}}$, on feroit $\sqrt{yy+gy-gg}=y+z$, ce qui donne $yy+gy-gg=yy+2yz+zz$

Premier exemple.

& $y=\frac{zz+gg}{g-2z}$: & $dy=\frac{2gzdz-2zzdz+2ggdz}{(g-2z)^2}$; & $\sqrt{yy+fy-gg}=\frac{gg+gz-zz}{g-2z}$: faiſant les ſubſtitutions on aura la transformée $\frac{2zzdz+2ggdz}{(g-2z)^2}$, dont la premiere partie $\frac{2zzdz}{(g-2z)^2}$ ſe trouve, par les regles que nous donnerons dans le Chap. X. être dépendante des logarithmes, & la ſeconde $\frac{2ggdz}{(g-2z)^2}$ eſt intégrable abſolument, ſon intégrale étant (Art. XXIII.) $\frac{2gz}{g-2z}$, ou bien (Art. XIX.) $\frac{gg}{g-2z}$: c'eſt-à-dire que ſon intégrale eſt en général, comme on le verra plus bas (Article LV.)

$gg+$

$\frac{gg+ng-g-2nz+2z}{g-2z}$ (n exprimant un nombre quelconque). Si on y ſuppoſe $n=1-g$, on trouvera la premiere des deux intégrales, & on aura la ſeconde en ſuppoſant $n=1$.

XXXVII.

Soit encore à intégrer $x^4 dx\,(aa+xx)^{\frac{1}{2}}$: Je fais $\sqrt{aa+xx}=x+t$; j'en tire $aa+xx=xx+2tx+tt$, donc $aa=2tx+tt$ & $x=\frac{aa-tt}{2t}$; $dx=-\frac{dt}{2}-\frac{aadt}{2tt}$; $x^4=\left\{\frac{aa-tt}{2t}\right\}^4$. On aura auſſi $x+t=\frac{aa+tt}{2t}$: donc $x^4 dx\sqrt{aa+xx}=\left\{\frac{aa-tt}{2t}\right\}^4\times\left\{\frac{aa+tt}{2t}\right\}\times\left\{\frac{aa+tt}{tt}\right\}\times-\frac{dt}{2}=-\frac{a^{12}dt}{64t^7}+\frac{a^{10}dt}{32t^5}+\frac{a^8dt}{64t^3}-\frac{a^6dt}{16t}+\frac{a^4tdt}{64}+\frac{a^2t^3dt}{32}-\frac{t^5dt}{64}$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{64}\times\frac{a^{12}}{6t^6}+\frac{1}{32}\times-\frac{a^{10}}{4t^4}+\frac{1}{64}\times-\frac{a^8}{2t^2}-\frac{a^6}{16}lt+\frac{a^4tt}{128}+\frac{a^2t^4}{128}-\frac{t^6}{384}$. Remettant dans cette intégrale pour t, t^2, &c. leurs valeurs, on aura l'intégrale cherchée. Second exemple.

XXXVIII.

Si l'on avoit $\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}}$, on feroit $x+\sqrt{aa+xx}=z$, ce qui donne $z-x=\sqrt{aa+xx}$; & $zz-2zx+xx=aa+xx$; & $zz-2zx=aa$, d'où l'on tire $x=\frac{zz-aa}{2z}$; $dx=(zz+aa)\frac{dz}{2zz}$; $\sqrt{aa+xx}=\frac{zz+aa}{2z}$. On aura donc après les ſubſtitutions la transformée $\frac{\frac{dz}{2zz}\cdot(zz+aa)}{\frac{zz+aa}{2z}}=\frac{dz}{z}$: dont l'intégrale eſt (Art. IV.) Cinquieme transformation. Premier exemple.

log. z. Remettant pour z sa valeur, on aura log. $(x + \sqrt{aa + xx})$ pour l'intégrale cherchée.

XXXIX.

Second exemple un peu différent du premier.

Si la proposée étoit $\frac{dx}{\sqrt{xx - aa}}$ on feroit encore $z = x + \sqrt{xx - aa}$, & en faisant les mêmes opérations que dans l'article précédent, on trouveroit $\int \frac{dx}{\sqrt{xx - aa}} = \text{log. } x + \sqrt{xx - aa}$: c'est ce que nous avons déja trouvé dans l'Introduction, (Article XXXVII.).

XL.

Cas plus compliqués que les précédens, dans lesquels notre premiere transformation réussit.

SCHOLIE. Si la différentielle étoit composée de deux quantités radicales, on pourroit dans certains cas se servir de notre premiere transformation, pourvu que la quantité sous le signe n'eût point de second terme, & que la différentielle fût multipliée par une puissance impaire de l'inconnue.

Soit, par exemple, $\frac{z^3 dz \sqrt{bb + zz}}{\sqrt{gg + zz}}$: je fais $\sqrt{bb + zz} = u$; on a donc $zz = uu - bb$; $zdz = udu$. La transformée sera donc $\frac{u^2 du (u^2 - b^2)}{\sqrt{uu - bb + gg}} = \frac{u^4 du}{\sqrt{uu - bb + gg}} - \frac{b^2 u^2 du}{\sqrt{uu - bb + gg}}$, différentielle réduite aux cas précédens.

XLI.

En examinant cette façon d'opérer on voit qu'elle ne réussit le plus souvent que dans les cas où les racines sont des racines quarrées, & où l'inconnue n'excede pas le second

degré. Je dis le plus ſouvent, parce qu'il y en a quelques-uns où elle réuſſit quels que ſoient le ſigne & la puiſſance de l'inconnue ſous le ſigne. Telles ſont toutes les différentielles compriſes ſous les deux formules ſuivantes. Deux formules qui comprennent ces cas.

1°. $\frac{dx.(x^m+b^m)^{\pm\frac{1}{n}}}{x^{tm+\cdots}}$, m, n, t étant des nombres entiers poſitifs, ou zéro. Car faiſant $\overline{x^m+b^m}^{\frac{t}{n}}=z$, on aura $x^m=z^n-b^m$; $dx=\frac{nz^{n-1}dz}{mx^{m-1}}$. La transformée ſera donc $\frac{nz^{n-1}dz.z^{\pm 1}}{mx^{\overline{t+1}.m}}$; mais $x^{\overline{t+1}.m}=\overline{z^n-b^m}^{t+1}$; donc quand t ſera un nombre entier, $t+1$ en ſera auſſi un; donc on n'aura plus de radical. Premiere formule.

2°. La ſeconde formule eſt $x^n dx.(x^m+b^m)^{\pm\frac{t}{p}}$, laquelle en ſuppoſant $\frac{n+1}{m}$ un nombre entier, ſe pourra délivrer de tous ſignes radicaux, ou au moins de quantités radicales complexes, ce qui ſuffit. Faiſant $\overline{x^m+b^m}^{\frac{t}{p}}=z$ on a $x^m=z^{\frac{p}{t}}-b^m$, $x=\overline{z^{\frac{p}{t}}-b^m}^{\frac{1}{m}}$; $dx=\frac{\frac{p}{t}z^{\frac{p}{t}-1}dz.\overline{z^{\frac{p}{t}}-b^m}^{\frac{1}{m}-1}}{m}$; $x^n=\overline{z^{\frac{p}{t}}-b^m}^{\frac{n}{m}}$. Subſtituant on aura $\frac{pz^{\frac{p}{t}-1}dz}{tm}.z^{\pm 1}.\left\{z^{\frac{p}{t}}-b^m\right\}^{\frac{1}{m}+\frac{n}{m}-1}$. Lorſque $\frac{n+1}{m}$ ſera un nombre entier, $\frac{1+n-1}{m}$ ſera auſſi entier, & par conſéquent la formule n'aura point de quantité complexe embarraſſée de radicaux. Seconde formule.

XLII.

Sixieme transformation.

C'eſt ici le lieu de parler d'une transformation du plus grand uſage dans de certains cas. Cette transformation conſiſte à faire $z^n = x$, n étant un nombre quelconque, dans les différentielles telles que $\frac{dz}{z\sqrt{a+bz^n}}$; la ſuppoſition de $z^n = x$ nous donne $z = x^{\frac{1}{n}}$; $dz = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}dx$; donc on a pour transformée $\frac{x^{\frac{1}{n}-1}dx}{nx^{\frac{1}{n}}\sqrt{a+bx}} = \frac{dx}{nx\sqrt{a+bx}}$, différentielle dont on fait évanouir le radical en faiſant $\sqrt{(a+bx)} = u$, & qu'on intégrera par les méthodes que nous donnerons dans le Chapitre X.

Appliquée à un exemple.

XLIII.

Septieme transformation.

Il y a encore une transformation qui conſiſte à égaler la changeante à une fraction. Cette transformation ſert ſouvent à préparer à celles que nous venons d'expoſer.

Exemple.

S'il s'agit d'intégrer la différentielle ſuivante $\frac{dx}{xx\sqrt{aa+xx}}$, je ferai d'abord $x = \frac{1}{u}$; donc $dx = \frac{-du}{uu}$; $xx = \frac{1}{uu}$; donc la différentielle entiere $\frac{dx}{xx\sqrt{aa+xx}} = \frac{\frac{-du}{uu}}{\frac{1}{uu}\sqrt{aa+\frac{1}{uu}}} = \frac{-du}{\sqrt{aa+\frac{1}{uu}}} = \frac{-udu}{\sqrt{a^2u^2+1}}$. Je fais à préſent ſelon notre premiere transformation $z = aauu+1$: donc $2aaudu =$

dz & $-udu = \frac{-dz}{2aa}$. On a auſſi $\sqrt{aauu+1} = \sqrt{z}$. Mettant donc à la place de $-udu$, & de $\sqrt{aauu+1}$ leurs valeurs en dz & en z, on a $\frac{-dz}{2aa\sqrt{z}}$ dont l'intégrale eſt (regle premiere) $\frac{-\sqrt{z}}{aa}$. Subſtituant à $\sqrt{z}$ ſon égale $\sqrt{aauu+1}$, il vient $-\frac{\sqrt{aauu+1}}{aa}$. Remettons enfin pour uu ſa valeur $\frac{1}{xx}$, nous avons $-\frac{\sqrt{aa+xx}}{aax}$ pour l'intégrale cherchée de $\frac{dx}{xx\sqrt{aa+xx}}$.

XLIV.

COROLL. Lorſque notre derniere transformation ſert à préparer à celles que nous avons enſeignées précédemment, il faut ordinairement faire cette opération la premiere ; autrement on tomberoit dans des longueurs de calcul. Cependant ce principe n'eſt pas général ; quelquefois on fait ces transformations indifféremment l'une avant l'autre. Si on avoit à intégrer, par exemple, $dx\sqrt{(1-x^{-\frac{2}{3}}-1)}$, on feroit d'abord $1-x^{-\frac{2}{3}} = z$, ce qui donne $1-x = z^{-\frac{3}{2}}$, $dx = \frac{3}{2}z^{-\frac{5}{2}}dz$. Donc en ſubſtituant on a $\frac{3}{2}z^{-\frac{5}{2}}dz\sqrt{z-1} = \frac{\frac{3}{2}dz\sqrt{z-1}}{z^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{2}\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{z-1}{z}} = \frac{3dz}{2zz}\sqrt{1-\frac{1}{z}}$. Soit à préſent $z = \frac{1}{t}$, on aura $\frac{1}{z} = t$; donc $\frac{dz}{zz} = -dt$; $\frac{3dz}{2zz} = -\frac{3}{2}dt$. Donc $\frac{3dz}{2zz}\sqrt{(1-\frac{1}{z})} = -\frac{3}{2}dt\sqrt{1-t} = -\frac{3}{2}dt.(1-t)^{\frac{1}{2}}$ dont l'intégrale eſt (Art. XIX.) $\frac{-\frac{3}{2}dt\,(1-t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times -dt} = (1-t)^{\frac{3}{2}}$.

Obſervation utile ſur cette derniere transformation.

Remettant pour t ſa valeur $\frac{1}{z}$, on a $(1-\frac{1}{z})^{\frac{3}{4}}$; & pour $\frac{1}{z}$ ſa valeur $\overline{1-x}^{\frac{2}{3}}$, on a enfin pour l'intégrale cherchée $(1-(1-x)^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = \int dx \sqrt{(\overline{1-x}^{-\frac{2}{3}}-1)}$.

XLV.

Reflexions générales ſur les transformations que nous venons d'expliquer.

Voilà à peu près toutes les transformations uſitées dans le Calcul intégral. On comprend ſans peine l'avantage infini dont elles ſont pour faciliter les opérations de ce calcul. La premiere, la ſixieme & la ſeptieme ſont ſurtout extrêmement commodes. Les commençans ne peuvent ſe les rendre trop familieres, en en faiſant eux-mêmes de fréquentes applications. C'eſt à l'uſage ſeul qu'il appartient de faire diſcerner celles de ces transformations qu'il faut employer préférablement aux autres, ſuivant les différentielles dont on cherche l'intégration.

CHAPITRE III.

De l'addition des conſtantes pour rendre les intégrales completes.

XLVI.

Néceſſité d'ajoûter une conſtante à l'intégrale cherchée.

IL eſt néceſſaire, avant d'aller plus loin, de remarquer ici que les conſtantes n'ayant point de différence, une intégrale, jointe par le ſigne + ou — avec une conſtante, donne la même différentielle que donneroit cette intégrale ſi elle étoit ſans conſtante. On n'eſt donc pas ſûr, lorſqu'on

retrouve l'intégrale d'une différentielle, d'avoir cette intégrale exacte ; il faut ſouvent lui ajoûter, ou en retrançher une conſtante ; nous allons donner la méthode pour la faire trouver.

XLVII.

Toute intégrale ſe repréſente par la ſurface d'une courbe.

Mais afin que les commençans ne ſoient point embarraſſés dans l'application de cette méthode, ils doivent avoir préſent à l'eſprit qu'on repréſente l'intégrale d'une différentielle qui n'a qu'une changeante, par la ſurface d'une courbe dont x eſt l'abſciſſe, & dont l'ordonnée ſera la quantité qui multiplie dx.

Qu'on ait, par exemple, cette différentielle $dx\sqrt{x+a}$: je prends une courbe CBD * dont l'abſciſſe $PA = x$, $AC = a$, & l'ordonnée $PD = \overline{x+a}^{\frac{1}{2}}$: l'eſpace élémentaire $PDpd$ eſt $dx\sqrt{x+a}$, l'eſpace entier $APDB$ eſt donc $\int dx\sqrt{x+a}$; or $\frac{2}{3}\overline{x+a}^{\frac{3}{2}}$ (Art. XIX.) eſt l'intégrale de $dx.(x+a)^{\frac{1}{2}}$, parce que cette différentielle eſt celle de $\frac{2}{3}.(x+a)^{\frac{3}{2}}$. Il ſemble donc d'abord que $\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}$ ſoit la valeur de l'aire $APDB$: mais il faut obſerver que $\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} \pm A$, A étant une conſtante quelconque, a auſſi pour différentielle $dx(x+a)^{\frac{1}{2}}$. Ainſi l'intégrale réelle de $dx.(x+a)^{\frac{1}{2}}$ eſt $\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} \pm A$,

Fig. 1.

* Pour avoir l'équation de cette courbe, il faut effacer dx de la différentielle propoſée, & ſuppoſer une changeante y égale à la quantité qui reſte après avoir effacé dx. Ici on a $y = \overline{x+a}^{\frac{1}{2}}$: ou en rendant cette équation commenſurable $yy = x+a$ équation à la parabole où l'origine des coordonnées n'eſt point au ſommet. Voyez Guiſnée, *Application de l'Algebre à la Géométrie.*

A étant une conſtante qui peut quelquefois être nulle, quelquefois être réelle, mais qu'il faut ſavoir déterminer dans chaque cas. Cela poſé, je paſſe à la regle.

XLVIII.

Méthode qui apprend à reconnoître quand l'intégrale eſt complette ; & quand elle ne l'eſt pas, à trouver la conſtante qui la rendra complette.

Faites la changeante x de l'intégrale égale à zéro, & ſi l'intégrale devient zéro, c'eſt ordinairement une marque qu'elle eſt exacte ; ſi au contraire après cette ſuppoſition de $x = 0$, il reſte une conſtante dans l'intégrale, il faut la joindre à l'intégrale trouvée avec un ſigne contraire à celui qu'elle a ; alors cette intégrale ſera complette.

XLIX.

1. Exemple.

Soit 1°. $y = \sqrt{px}$, on a $y\,dx = dx\sqrt{px}$, dont l'intégrale eſt (Art. II.) $\int y\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{p} \cdot x^{\frac{3}{2}}$. La ſuppoſition de $x = 0$ donne le tout $= 0$, donc l'intégrale eſt complette.

L.

2. Exemple.

Soit 2°. $dx\sqrt{x+a}$ dont l'intégrale eſt $\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}$; faiſant $x = 0$ il vient $\frac{2}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}}$, donc l'intégrale n'eſt pas complette, & la conſtante qu'il faut y ajoûter eſt $-\frac{2}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}}$.

LI.

Démonſtration générale de cette méthode.

Pour démontrer cette méthode, & lui donner la plus grande généralité dont elle eſt ſuſceptible, je ſuppoſe que l'on connoiſſe la valeur complette de l'intégrale, lorſque x a une certaine valeur que je déſigne par a, & que cette

cette valeur complette de l'intégrale ſoit Q, alors voici comme je raiſonne.

Soit X la valeur générale de l'intégrale trouvée par le calcul, & à laquelle il manque une conſtante C que je ne connois pas encore : $X+C$ ſera l'intégrale complette que je cherche.

Je ſuppoſe à préſent qu'en ſubſtituant a pour x dans X, X devienne A, j'aurai $A+C$ pour la valeur complette de l'intégrale, lorſque $x=a$; d'ailleurs par la premiere ſuppoſition cette valeur complette $=Q$: donc $A+C=Q$, donne $C=Q-A$.

Mais le plus ſouvent cette valeur complette Q de l'intégrale n'eſt pas donnée & ne peut l'être, & la ſeule ſuppoſition qu'on puiſſe faire c'eſt de chercher l'endroit où la valeur Q de l'intégrale $=0$; en ce cas $Q=0$, donc $A+C=0$, donc $C=-A$.

De plus, au lieu de prendre $x=a$, on le ſuppoſe ordinairement $=0$, & cette ſuppoſition eſt plus ſimple, parce que l'aire d'une courbe commence avec les abſciſſes, & que par conſéquent $Q=0$, lorſque $x=0$: voilà ſur quoi eſt fondée la regle.

Après cette démonſtration, appliquons-la au ſecond exemple que nous avons donné plus haut.

LII.

Soit $dx\sqrt{x+a}$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{3}.(x+a)^{\frac{3}{2}}=X$. Suppoſant $x=0$, il vient $\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}=A$; donc $\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$

Appliquée à la différentielle qui nous a ſervi de ſecond exemple.

LV.

OBSERVATION IMPORTANTE. L'addition de la conſtante fait quelquefois que la différentielle paroît avoir deux intégrales différentes : mais ſi on examine attentivement ces intégrales, on verra qu'elles ne différent jamais que par un terme conſtant qui ſe trouve quelquefois enveloppé dans l'une des deux. Ainſi l'on trouve que $\frac{f}{f-bx}$ & $\frac{bx}{f-bx}$ ſont également les intégrales de $\frac{bfdx}{(f-bx)^2}$, puiſqu'en différentiant ces deux intégrales, on retrouve cette même différentielle. Mais il eſt aiſé de voir que $\frac{bx}{f-bx} = \frac{f}{f-bx} - 1$; d'où l'on voit que ces deux intégrales ne différent que par la conſtante -1. Et en général l'intégrale de $\frac{bfdx}{(f-bx)^2}$ ſera $\frac{f}{f-bx} + A1$ (A repréſentant une conſtante quelconque), ou $\frac{f+Af-Abx}{f-bx}$: & ſi on fait $1+A=n$ (n étant un nombre quelconque), l'intégrale ſera $\frac{fn-bnx+bx}{f-bx}$. Si $n=0$, on aura $\frac{bx}{f-bx}$ qui eſt la ſeconde des deux intégrales trouvées : ſi $n=1$, c'eſt-à-dire, ſi $A=0$, on aura la premiere ; & donnant ſucceſſivement à n différentes valeurs, on en trouvera une infinité d'autres qui toutes ne differeront que par des conſtantes.

LVI.

Il faut bien avoir préſent ce que nous venons de dire ſur l'addition des conſtantes : nous n'en parlerons plus dans la ſuite de ce Traité ; le lecteur eſt en état d'appliquer la regle générale aux différentes intégrales que nous trouve-

rons. Il faut l'appliquer auſſi aux intégrales trouvées dans les deux Chapitres précédens.

CHAPITRE IV.

Définitions & notions préparatoires à l'intégration des différentielles binomes, trinomes, &c.

LVII.

ON ſuppoſe que dans une grandeur complexe, les expoſans des puiſſances de la changeante x qui diſtingue les termes, forment une progreſſion arithmétique; on l'appelle un binome quand il n'y a que deux termes; un trinome quand il y en a trois, & ainſi de ſuite. Ainſi $ax^0 + bx^n$ eſt un binome, $ax^0 + bx^n + cx^{2n}$ un trinome, $a + bx^n + cx^{3n}$ un quatrinome : on ſous-entend le troiſieme terme $0x^{2n}$ qui eſt $= 0$, comme s'il y avoit $a + bx^n + 0x^{2n} + cx^{3n}$. Définition des Binomes, &c.

On rapportera toutes les expreſſions des différentielles complexes, autres que celles dont nous avons parlé (Chap. I.), aux formules générales qui ſuivent.

Formule des Binomes.

$$gx^m dx . (a + bx^n)^p$$

Des Trinomes.

$$gx^m dx . (a + bx^n + cx^{2n})^p$$

Et ainſi de ſuite pour les quatrinomes, &c.

g, a, b, c, &c. repréſentent les coefficiens ; x la changeante ; p l'expoſant de la puiſſance de la grandeur ſous le ſigne : cet expoſant ſera un nombre entier négatif, ou une fraction. Car nous avons vu (Art. XI.) que quand c'eſt un entier poſitif, la différentielle s'integre tout de ſuite par la premiere regle.

LVIII.

Il peut auſſi y avoir dans une même différentielle pluſieurs grandeurs complexes multipliées les unes par les autres, comme $gx^m dx.(a+bx^n)^p \times (c+ex^n+\&c.)^q$: ces différentielles même peuvent être, ſi l'on veut, réduites aux cas précédens.

Car ſoit $p=\frac{r}{s}$ & $q=\frac{t}{k}$, on aura $gx^m dx.(a+bx^n)^p \times (c+ex^n)^q = gx^m dx.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} \times (c+ex^n)^{\frac{t}{k}} = gx^m dx.(a+bx^n)^{\frac{rk}{sk}} \times (c+ex^n)^{\frac{ts}{sk}} = gx^m dx.(\overline{a+bx^n}^{rk}.\overline{c+ex^n}^{ts})^{\frac{1}{sk}}$. Donc, &c.

LIX.

Elles peuvent avoir deux formes identiques.

REMARQUE I. Les formules précédentes peuvent avoir deux formes ſans changer de valeur : la premiere quand les expoſans n, de la grandeur ſous le ſigne ſont poſitifs ; la ſeconde quand ils ſont négatifs. Au reſte on peut facilement les rendre de poſitifs négatifs, par une méthode qui ſert à mettre ſous le ſigne une grandeur qui eſt

Méthode pour ôter de deſſous le ſigne une grandeur qui y eſt, *& vice-verſâ.*

hors du ſigne, & à ôter de deſſous le ſigne une grandeur qui y eſt.

Soit $x^m \times \overline{ax^n}^p$. Il eſt évident qu'on peut multiplier cette quantité par x^q en la diviſant en même temps par x^q, ſans changer ſa valeur; pour cela j'écris x^{m+q}, & en même temps je diviſe la ſeconde partie $\overline{ax^n}^p$ par x^q: mais comme cette ſeconde partie eſt ſous un ſigne dont l'expoſant eſt p, il la faut diviſer par $x^{\frac{q}{p}}$, & l'écrire ainſi $\overline{ax^{n-\frac{q}{p}}}^p$; & la nouvelle grandeur ſera $x^{m+q}(ax^{n-\frac{q}{p}})^p$, identique avec la propoſée $x^m \times \overline{ax^n}^p$. La raiſon de la ſeconde opération, eſt que la grandeur qui diviſe la ſeconde partie doit être égale à celle qui a multiplié la premiere; or $x^{\frac{q}{p}\,p} = x^q$.

Procédé de cette méthode.

1°. Lorſqu'il s'agit de mettre ſous le ſigne une grandeur qui n'y eſt pas.

LX.

Si on vouloit diviſer la ſeconde partie par x^n, c'eſt-à-dire, ôter x^n de deſſous le ſigne, il faudroit multiplier en même temps la premiere partie par x^{np}; ce qui changeroit la propoſée en la ſuivante $x^{m+np}.(ax^{n-n})^p = x^{m+np} \times a^p$. La raiſon en eſt la même que la précédente.

2°. D'ôter de deſſous le ſigne une quantité qui s'y trouve.

LXI.

Quand l'expoſant p eſt une fraction, comme dans $x^4 \times \overline{ax^8}^{\frac{1}{2}}$, ſi on vouloit multiplier la premiere partie par x^3, on trouveroit en ſuivant la regle précédente x^{4+3}.

Cas où l'expoſant de la puiſſance eſt fractionnaire.

$\left\{ax^{8-\frac{3}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} = x^7 \times \overline{ax^2}^{\frac{1}{2}}$. Alors $\frac{q}{p}$ indique une multiplication au lieu d'une diviſion. Car $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 3 \times 2$.

LXII.

Cas où il eſt négatif.

Lorſque l'expoſant p eſt négatif, c'eſt-à-dire, lorſqu'il eſt $-p$, on trouvera que $\frac{-q}{p}$ devient $\frac{-q}{-p}$ ou $+\frac{q}{p}$.

LXIII.

Uſages de la méthode précédente.

Par le moyen de cette méthode on peut rendre les expoſans de nos formules de poſitifs, négatifs.

1°. Pour rendre les expoſans de nos formules de poſitifs, négatifs.

Je diviſe la grandeur ſous le ſigne par la changeante x élevée à la plus haute puiſſance qu'a cette même changeante ſous le ſigne ; je multiplie en même temps la changeante x hors du ſigne par la même grandeur. $gx^m dx$, $(a+bx^n)^p$ devient en pratiquant l'opération précédente $gx^{m+np}(b+ax^{-n})^p$.

La ſeconde forme de $gx^m dx(a+bx^n+cx^{2n})^p$ eſt de la même maniere $gx^{m+2np}dx(c+bx^{-n}+ax^{-2n})^p$. Enfin $gx^m dx\ (a+bx^n+Bx^{2n}) \times (c+ex^n+fx^{2n}+\gamma x^{3n})^p$ devient $gx^{m+2n+3np}dx(B+bx^{-n}+ax^{-2n}) \times (\gamma+fx^{-n}+ex^{-2n}+cx^{-3n})^p$.

LXIV.

2°. Pour ramener beaucoup de différentielles aux formules précédentes.

Cette méthode ſert auſſi pour ramener à nos formules un grand nombre de différentielles.

Lorſque

Lorſque les deux termes de la grandeur ſous le ſigne ſont multipliés par la changeante, comme dans $\frac{b\,dx}{x^3}\sqrt{cx+x^2} = bx^{-3}\,dx\,(cx+x^2)^{\frac{1}{2}}$, il faut pour réduire cette quantité à la premiere forme de la formule des binomes, dégager le premier terme de la changeante qui le multiplie. Or cela ſe fait aiſément par le moyen de notre méthode. Je diviſe la grandeur ſous le ſigne par $x^{1\times\frac{1}{2}}$, & je multiplie la grandeur hors du ſigne par cette même quantité ; j'ai $bx^{-\frac{1}{2}}\,dx \times \overline{c+x}^{\frac{1}{2}}$, dans laquelle $b=g$; $-\frac{1}{2}=m$; $c=a$; $b=1$; $n=1$; $p=\frac{1}{2}$. Application à des binomes.

Pour réduire cette différentielle à la ſeconde forme de la même formule, je multiplie la partie hors du ſigne par $x^{2\times\frac{1}{2}}$, & je diviſe la partie ſous le ſigne par la même grandeur : ce qui me donne $bx^{-2}(1+cx^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ou $g=b$; $m=2$; $b=1$; $a=c$; $n=1$; $p=\frac{1}{2}$.

LXV.

De la même maniere pour ramener à la premiere forme de la formule $gx^m\,dx\,(a+bx^n+Bx^{2n})\times(c+ex^n+fx^{2n}+\gamma x^{3n})^p$ la quantité du même genre $x^{-2}\,dx\,(3\alpha-6x^2)\times(\alpha x-6x^3+kx^4)^{-\frac{1}{2}}$, il faudroit diviſer la grandeur ſous le ſigne par $x^{1\times-\frac{1}{2}}$, & multiplier celle qui eſt hors du ſigne par la même quantité ; cette opération nous donne $x^{-\frac{6}{2}}\,dx\,(3\alpha-6x^2)\times(\alpha+0x^1-6x^2+kx^3)^{-\frac{1}{2}}$, où on a $g=1$; $m=-\frac{1}{2}$; $a=3\alpha$; Application à des trinomes.

$b=0$; $B=-6$; $c=a$; $e=0$; $f=-6$, $\gamma=k$; $p=-\frac{2}{2}$.

Si on veut ramener la même différentielle à la ſeconde forme de la même formule, il faut 1° diviſer la premiere grandeur complexe $3a-6x^2$ par x^2, & multiplier la grandeur $x^{-2}dx$, par x^2. 2°. Diviſer la ſeconde grandeur complexe $(ax-6x^3+kx^4)^{-\frac{1}{2}}$, & multiplier en même temps $x^{-2}dx$ par $x^{4\times-\frac{1}{2}}=x^{-2}$; & on aura $x^{-2}dx$ $(-6+3ax^{-2})\times(k-6x^{-1}+ax^{-3})^{-\frac{1}{2}}$.

LXVI.

Il en ſera de même de beaucoup d'autres différentielles. Il eſt bon auſſi d'obſerver que des différentielles incomplexes, peuvent avoir la forme de différentielles complexes. Par exemple, $dx\times\sqrt{ax}=x^0\times dx\,(0+ax^1)^{\frac{1}{2}}$.

LXVII.

Troiſieme uſage de la méthode expliquée ci-deſſus.

REMARQUE 2. Il eſt quelquefois néceſſaire pour faciliter de certaines intégrations, dont nous allons parler tout à l'heure, de faire enſorte que l'expoſant de la changeante hors du ſigne ſoit moindre d'une unité que l'expoſant de la plus haute puiſſance de la changeante ſous le ſigne. Or cela ſe fait par le moyen des indéterminées, & de la préſente méthode.

Soit $(A)\ x^r dx\,(e+kx^s)^n$. Pour que l'expoſant r ſoit moindre d'une unité que s, je multiplie la changeante x^r hors du ſigne, par x élevée à une puiſſance dont l'expoſant ſoit l'indéterminée q, c'eſt-à-dire, par x^q, & je diviſe en

même temps $\overline{e+kx^s}^n$ par $x^{\frac{q}{n}}$. J'aurai $x^r dx\,(e+kx^s)^n$ $= (B)\ x^{r+q}\,dx\,(ex^{-\frac{q}{n}} + kx^{s-\frac{q}{n}})^n$. Je ſuppoſe à préſent $s - \frac{q}{n} = r+q+1$, j'aurai $q = \frac{sn-rn-n}{n+1}$, & cette valeur de q étant miſe à ſa place dans (B), on a $x^{\frac{r+sn-n}{n+1}}\,dx\left\{ex^{\frac{r-s+1}{n+1}} + kx^{\frac{r+sn+1}{n+1}}\right\}^n$, où l'expoſant de x hors du ſigne ne differe que d'une unité de l'expoſant de la plus haute puiſſance de x ſous le ſigne.

On remarquera qu'il eſt indifférent de multiplier $x^r dx$ par x^q, en diviſant la grandeur ſous le ſigne par $x^{\frac{q}{n}}$, ou de faire l'inverſe de cette opération.

LXVIII.

Toutes ces choſes ſuppoſées & bien entendues, je paſſe à l'intégration des différentielles binomes, trinomes, &c. La méthode pour intégrer ces différentielles a deux parties. La premiere renferme les binomes qui peuvent s'intégrer algébriquement, c'eſt-à-dire exactement. La ſeconde comprend celles qui ne s'integrent exactement qu'en ſuppoſant la quadrature ou la rectification d'une courbe.

CHAPITRE V.

Premiere partie de la Méthode pour intégrer les différentielles Binomes compriſes dans la formule $gx^m dx(a+bx^n)^p$, *ou* $gx^{m+np}dx(b+ax^{-n})^p$, *dans laquelle* p *eſt un nombre quelconque.*

LXIX.

Elle contient les différentielles qui s'integrent algébriquement.

POur trouver l'intégrale de $(A)\ gx^m dx(a+bx^n)^p$, il faut 1°. faire enſorte que l'expoſant de la changeante x hors du ſigne ſoit moindre d'une unité que l'expoſant de la plus haute puiſſance de x ſous le ſigne. Or cela ſe fait de la maniere que nous avons enſeigné (Art. LXVII.).

Procédé de la méthode.

2°. Il faut ſuppoſer une nouvelle changeante z égale à la grandeur qui eſt ſous le ſigne, & ſubſtituer les valeurs que donne cette transformation, de la maniere que nous avons enſeigné (Art. XVI.). On a par ce moyen une transformée dont le premier terme eſt intégrable par notre regle fondamentale. Le ſecond terme eſt le même qu'étoit la quantité avant la transformation, à l'exception qu'il a un coefficient différent, & que l'expoſant de la changeante hors du ſigne eſt augmenté ou diminué en proportion arithmétique. On fait ſur ce ſecond terme la même opération que ſur le premier, ainſi de ſuite.

LXX.

Détaillons cette méthode en l'appliquant à notre formule (*A*) $gx^m dx\ (a+bx^n)^p$. Appliquée à la formule $gx^m dx\ (a+bx^n)^p$.

1°. Elle devient par la premiere opération (*B*) $gx^{m+q} dx \left\{ax^{-\frac{q}{p}} + bx^{n-\frac{q}{p}}\right\}^p$, & ſuppoſant $m+q+1=n-\frac{q}{p}$, on en tire $q=\frac{np-mp-p}{p+1}$. Je ſubſtitue cette valeur de q à ſa place dans (*B*), on trouve (*A*) = (*C*) $gx^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx \cdot \left\{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}\right\}^p$.

2°. Je ſuppoſe z égale à la grandeur ſous le ſigne, c'eſt-à-dire (*D*) $z=ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}$: ce qui donne (*E*) $z=x^{\frac{m-n+1}{p+1}} \times (a+bx^n)$. Donc on a (*F*) $z^{p+1} = x^{m-n+1} \times (a+bx^n)^{p+1}$, & (Φ) $z^p = \left\{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}\right\}^p$. Différentiant (*D*) j'ai (*G*) $dz = \left\{\frac{m-n+1}{p+1}\right\} ax^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx + \left\{\frac{m+np+1}{p+1}\right\} bx^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx$. Et par conſéquent (*H*) $x^{\frac{m+np-p}{p+1}} dx$ = (*I*) $\left\{\frac{p+1}{m+np+1}\right\} \frac{1}{b} dz - \left\{\frac{m-n+1}{m+np+1}\right\} \frac{a}{b} x^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx$.

3°. Je ſubſtitue dans le ſecond membre de l'équation $A=C$, la valeur (*I*) de (*H*), & on a A = (*L*) $\left\{\frac{p+1}{m+np+1}\right\} \frac{g}{b} dz \times \left\{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}\right\}^p - \left\{\frac{m-n+1}{m+np+1}\right\} \frac{ag}{b} x^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx \times \left\{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}\right\}^p$. Ou ſubſtituant encore dans le premier terme de (*L*) au lieu de

$\left\{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}}+bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}\right\}^{p}$ ſa valeur z^{p} priſe de (*), on aura $(A)=(M)\left\{\frac{p+1}{m+np+1}\right\}\frac{g}{b}z^{p}\,dz-(N)\left\{\frac{m-n+1}{m+np+1}\right\}\frac{ag}{b}x^{\frac{m+n-p}{p+1}}\,dx\times\left\{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}}+bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}\right\}^{p}=(M)\left\{\frac{p+1}{m+np+1}\right\}\frac{g}{b}z^{p}\,dz-(P)\left\{\frac{m-n+1}{m+np+1}\right\}\frac{ag}{b}x^{m-n}\,dx\,(a+bx^{n})^{p}$.

4°. Je cherche l'intégrale de cette équation. Or je vois bien-tôt que la regle fondamentale me donne celle de la partie (M), je la prends & je trouve $\int(A)\,gx^{m}\,dx\,(a+bx^{n})^{p}=(Q)\frac{1}{m+np+1}\times\frac{g}{b}z^{p+1}-(R)\left\{\frac{m-n+1}{m+np+1}\right\}\frac{ag}{b}\times\int x^{m-n}\,dx\,(a+bx^{n})^{p}$. Je ſubſtitue dans (Q) la valeur de z^{p+1} priſe de (F), & j'ai $\int(A)\,gx^{m}\,dx\,(a+bx^{n})^{p}=(T)\frac{1}{m+np+1}\times\frac{1}{b}\times gx^{m-n+1}\,(a+bx^{n})^{p+1}-(R)\left\{\frac{m-n+1}{m+np+1}\right\}\frac{a}{b}\int gx^{m-n}\,dx\,(a+bx^{n})^{p}$.

LXXI.

Voilà le premier terme de l'intégrale qu'on cherche. L'on trouvera tous les ſuivans à l'infini par de ſimples ſubſtitutions. Le ſecond, par exemple, ſe trouve en mettant dans (T), & dans (R), à la place de m, $m-n$, & multipliant par le coefficient de (R), ce que donne cette ſubſtitution. Ce ſecond terme ſera $(V)-\left\{\frac{m-n+1}{m+np+1}\right\}\times\frac{1}{m+np+1-n}\times\frac{a}{bb}\,gx^{m+1-2n}\,(a+bx^{n})^{p+1}-(X)\left\{\frac{m-n+1}{m+np+1}\right\}\times\left\{\frac{m+1-2n}{m+np+1-n}\right\}\frac{aa}{bb}\int gx^{m-2n}\,dx\times(a+bx^{n})^{p}$.

La raiſon de cette opération eſt évidente. Car nous venons de trouver l'intégrale de $(A)\ gx^m\,dx \times (a+bx^n)^p$; nous cherchons maintenant celle de $(R) - \left\{\frac{m-n+1}{m+np+1}\right\} \times \frac{a}{b} \times gx^{m-n}\,dx \times (a+bx^n)^p$. En quoi différent ces deux différentielles? Si nous les comparons enſemble, nous trouvons $-\left\{\frac{m-n+1}{m+np+1}\right\} \times \frac{a}{b} = 1$, $m-n=m$; donc pour avoir l'intégrale de R, il faudra ſubſtituer dans celle de A, $m-n$ à m; & multiplier chaque terme par $-\left\{\frac{m-n+1}{m+np+1}\right\} \times \frac{a}{b}$.

LXXII.

Le troiſieme terme ſe trouve par la même raiſon, en mettant dans T & dans R, $m-2n$ au lieu de m, & multipliant ce qui en vient par le coefficient de X.

De la même maniere on aura le quatrieme terme, & tant d'autres qu'on voudra de la ſuite qui eſt l'intégrale cherchée. Ils ſont chacun multipliés par $g(a+bx^n)^{p+1}$; ainſi il ſuffit d'écrire ce commun multiplicateur une ſeule fois au commencement de la ſuite.

LXXIII.

Moyen d'abréger l'expreſſion de l'intégrale de la formule.

REMARQUE 1. On peut abréger l'expreſſion de cette intégrale. Pour cela, il faut 1°. diviſer le numérateur & le dénominateur du premier terme, chacun par n; ceux du ſecond terme par n^2; ceux du troiſieme par n^3, & ainſi de ſuite. Cette opération donne après la réduction $f(A)$

$$= \frac{g}{n}(a+bx^n)^{p+1} \times \left(\left\{ \frac{1}{\frac{m+np+1}{n}} \right\} \frac{1}{b}\, x^{m-n+1} - \left\{ \frac{\frac{m+1-n}{n}}{\frac{(m+np+1)(m+np+1-n)}{n\,n}} \right\} \frac{a}{bb}\, x^{m-2n+1} + \&c. \right).$$

2°. Je ſuppoſe . . . . . $\frac{m+1}{n} = r$.

ce qui donne . . . . . $m+1 = rn$.

$$\frac{m+1-n}{n} = r-1.$$

$$m+1-n = rn-n.$$

$$m+1-2n = rn-2n.$$

Je ſuppoſe encore . . . . . $\left.\begin{matrix} r+p \\ \text{ou } \frac{m+np+1}{n} \end{matrix}\right\} = s$.

ce qui donne . . . . . $\frac{m+np+1-n}{n} = s-1$.

& . . . . . $\frac{m+np+1-2n}{n} = s-2$.

3°. Je ſubſtitue r, $r-1$, $r-2$, &c. s, $s-1$, $s-2$, &c. à la place de leurs valeurs dans la derniere expreſſion de l'intégrale, & on aura la formule ſuivante.

Premiere formule (↓) de l'intégrale des différentielles binomes qu'on peut ramener à $gx^m dx (a+bx^n)^p$.

$$\int g x^m dx\,(a+bx^n)^p = \frac{g}{n}(a+bx^n)^{p+1} \times \left(\frac{1}{s \times b}\, x^{rn-n} - \left\{ \frac{r-1}{s(s-1)} \right\} \frac{a}{bb}\, x^{rn-2n} + \left\{ \frac{(r-1)(r-2)}{s(s-1)(s-2)} \right\} \frac{aa}{b^3}\, x^{rn-3n} - \&c. \right),$$

ou bien en mettant pour $rn-n$, $rn-2n$, & leurs valeurs $\int(A) = \frac{g}{n}(a+bx^n)^{p+1} \times \left(\frac{1}{s \times b}\, x^{m+1-n} - \left\{ \frac{r-1}{s(s-1)} \right\} \frac{a}{bb}\, x^{m+1-2n} + \left\{ \frac{(r-1).(r-2)}{s(s-1)(s-2)} \right\} \frac{aa}{b^3}\, x^{m+1-3n} - \&c. \right)$.

LXXIV.

LXXIV.

REMARQUE 2. Quand le ſecond terme bx^n du binome $\overline{a+bx^n}^p$ eſt négatif, il faut changer dans la formule les ſignes des termes dans leſquels b a une dimenſion impaire.

LXXV.

On peut avoir par la même méthode une formule d'intégrale de $gx^m dx\,(a+bx^n)^p$, où les puiſſances de la changeante x qui en diſtinguent les termes ayent pour expoſans la progreſſion arithmétique $m+1$, $m+1+n$, $m+1+2n$, au lieu que ces expoſans ſont dans la formule précédente $m+1-n$, $m+1-2n$, $m+1-3n$, &c. L'opération eſt abſolument la même, que celle que nous avons déja faite, excepté qu'il faut ſuppoſer $m+q+1 = -\frac{q}{p}$, & non pas $= n-\frac{q}{p}$; ce qui donnera $q = -\frac{mp-p}{p+1}$. Après les ſubſtitutions & transformations on aura $\int gx^m dx\,(a+bx^n)^p = (\gamma)\left\{\frac{1}{m+1}\right\} \times \frac{g}{a} \times x^{m+1} \times (a+bx^n)^{p+1} - \left\{\frac{m+1+np+n}{m+1}\right\} \frac{bg}{a} \int x^{m+n} dx \times (a+bx^n)^p$; on trouvera le ſecond, troiſieme, quatrieme, &c. terme de l'intégrale comme ci-deſſus (Art. LXXI.). L'intégrale eſt $g\,(a+bx^n)^{p+1} \times \left(\left\{\frac{1}{m+1}\right\} \frac{1}{a} x^{m+1} - \left\{\frac{m+1+np+n}{(m+1).(m+1+n)}\right\} \frac{b}{aa} x^{m+1+n} + \left\{\frac{(m+1+np+n).(m+1+np+2n)}{(m+1).(m+1+n).(m+1+2n)}\right\} \frac{bb}{a^3} \times x^{m+1+2n} - \text{&c.} \right)$.

LXXVI.

On abrégera l'expreſſion de cette formule par le même moyen qui a ſervi pour la précédente. On diviſera le numérateur & le dénominateur du premier coefficient chacun par $-n$, ceux du ſecond par $-n \times -n$, ceux du troiſieme par $-n^3$, & ainſi de ſuite. Après on fera paſſer au dénominateur du multiplicateur commun une $-n$ du diviſeur de chaque terme des coefficiens. Enfin on ſuppoſera . . . . . $\frac{m+1}{-n} = s$

$$\frac{m+1}{-n} - p = s - p = r$$

d'où l'on tire . . . . . $\frac{m+1+n}{-n} = s-1$,

$$\frac{m+1+2n}{-n} = s-2, \text{ \&c.}$$

& encore . . . . . $\frac{m+1+np}{-n} = r$

$$\frac{m+1+np+n}{-n} = r-1$$

$$\frac{m+1+np+2n}{-n} = r-2, \text{ \&c.}$$

Mettant ces valeurs à leurs places dans les coefficiens de l'intégrale, on aura cette ſeconde formule.

Seconde formule (ω) de l'intégrale de $gx^m dx$ $(a+bx^n)^p$.

$$\int g x^m dx\,(a+bx^n)^p = (\omega)\ \frac{g}{-n}\,(a+bx^n)^{p+1} \times \left(\frac{1}{as}\,x^{m+1} - \left\{\frac{r-1}{s.(s-1)}\right\}\frac{b}{aa}\,x^{m+1+n} + \left\{\frac{(r-1).(r-2)}{s.(s-1).(s-2)}\right\}\frac{bb}{a^3}\,x^{m+1+2n} - \text{\&c.}\right).$$

LXXVII.

REMARQUE 3. Si la différentielle binome étoit $x^m dx\,(ax^n + bx^{2n})^p$, il ſeroit aiſé d'en trouver l'intégrale par notre méthode. Il ſuffiroit de préparer la différentielle, de maniere que la changeante x ne ſe trouvât qu'au ſecond terme : c'eſt ce qu'on feroit par le moyen de la regle donnée, Article LX.

LXXVIII.

REMARQUE 4. La même méthode nous donneroit auſſi deux formules d'intégration pour la ſeconde forme de la formule des binomes, $gx^{m+np}\,dx\,(b+ax^{-n})^p$; mais il eſt inutile de s'y arrêter, les deux que nous venons de trouver étant ſuffiſantes.

La ſeconde forme $gx^{m+np}\,dx\,(b+ax^{-n})^p$ de la formule des binomes donne auſſi deux formules d'intégration.

CHAPITRE VI.

Obſervations ſur les deux formules d'intégration (†) *&* (ω) *de la premiere partie de la méthode des binomes.*

LXXIX.

DAns nos deux formules, lorſque r, ou $\frac{m+1}{n}$ dans la premiere, & $\frac{m+1}{-n}-p$ dans la ſeconde, eſt un nombre entier poſitif, il eſt évident que la ſuite ſera finie & exacte,

Cas dans lequel r eſt un nombre entier poſitif. N'a point de difficulté.

puiſque $r-1$, $r-2$, &c. étant coefficiens des termes de la ſuite, & r un nombre entier poſitif, un des coefficiens & tous les ſuivans ſeront $= 0$. Donc la ſuite aura autant de termes, qu'il y aura d'unités dans le nombre entier r.

Cas plus difficile, quand s eſt un nombre entier poſitif.

Mais ſi s eſt un nombre entier poſitif, alors le cas eſt plus difficile : nous allons le développer.

Expliqué d'abord pour la premiere formule (ϟ).

Commençons par la premiere formule (ϟ).

LXXX.

1°. Lorſque s étant un nombre entier poſitif, r n'en eſt pas un.

1°. Il peut arriver que r ne ſoit pas un nombre entier poſitif, & que s en ſoit un; car ſoit, par exemple, $m=2$; $n=5$; $p=\frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{5}+1$, ou $\frac{2}{5}+2$, ou &c. on a $s\left\{\frac{m+1}{n}+p\right\}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$, ou $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+1$, ou $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+2$, &c. = à un nombre entier poſitif, & en général ſi $p=\frac{n-m-1}{n}+q$, en prenant q pour un nombre entier poſitif, on aura $s\left\{\frac{m+1}{n}+p\right\}=q+1$.

Comme les termes dont le dénominateur eſt égal à zéro ſont infinis, on pourroit croire que dans ce cas l'intégrale eſt infinie : mais il y a une infinité de cas où cela n'eſt point, l'intégrale dépendant de la quadrature d'une courbe, dans laquelle tant que x eſt finie, l'aire de la courbe l'eſt auſſi. Car ſoit comme dans l'exemple précédent, $m=2$, $n=5$, $p=\frac{2}{5}$, on a $gx^m dx.(a+bx^n)^p = gx^2 dx.(a+bx^5)^{\frac{2}{5}}$, dont l'intégrale dépend de la quadrature d'une courbe dans laquelle (Art. XLVII.) l'abſciſſe étant x

l'ordonnée eſt $gx^2 . \overline{a+bx^5}^{\frac{2}{5}}$. Or il eſt viſible que lorſque $x=0$, cette ordonnée eſt $=0$, & qu'elle n'eſt infinie que lorſque x elle-même eſt infinie. Donc tant que x eſt finie, l'aire de la courbe exprimée par $\int \frac{gx^2\,dx}{\overline{a+bx^5}^{\frac{2}{5}}}$ eſt auſſi finie.

LXXXI.

La formule ou ſerie (↓) ne pouvant donc ſervir dans ce cas, il faut avoir recours à la ſerie (*W*) ou formule $hx^k\,dx\,(e+cx^q)^\alpha$ de l'Art. XI. en faiſant

$$\begin{aligned} g &= h \\ m &= k \\ a &= e \\ b &= c \\ n &= q \\ \alpha &= p \end{aligned}$$

Dans ce cas la premiere formule (↓) ne peut ſervir.

& ſi dans cette ſerie le dénominateur de quelqu'un des termes devient $=0$, c'eſt-à-dire (Schol. art. XII.) ſi $\frac{k+1}{-q}$, ou ſa valeur $\frac{m+1}{-n}$, eſt un nombre entier poſitif, on pourra trouver l'intégrale finie & exacte de la différentielle propoſée. Car puiſque dans notre formule (↓) $\frac{m+1}{n}+p$ eſt (hypoth.) un nombre entier poſitif, & que $\frac{m+1}{-n}$ eſt auſſi ſuppoſé un nombre entier poſitif, il faut néceſſairement pour que ces deux ſuppoſitions s'accordent que $p=\alpha$ ſoit un entier poſitif. Or cela poſé on a (Article XI.) l'intégrale finie & exacte de notre différentielle.

Mais alors la ſeule regle fondamentale donne l'intégrale.

LXXXII.

2°. Si $r\left\{\frac{m+1}{n}\right\}$ & $s\left\{\frac{m+1}{n}+p\right\}$ ſont tous deux

2°. Lorſque r & s ſont tous deux entiers poſitifs.

des nombres entiers positifs, il est visible que p sera nécessairement ou un nombre entier positif, ou un nombre entier négatif $< \frac{m+1}{n}$.

Premier cas $r < s$ n'a aucune difficulté.

Dans le premier cas r est $< s$, alors la formule (†) ne fait aucune difficulté; car r étant un nombre entier positif plus petit que s, la serie qui donne l'intégrale se trouve finie & exacte, avant qu'on soit arrivé au terme dont le dénominateur seroit égal à zéro.

D'ailleurs on peut résoudre ce cas simplement par l'Article XI. que nous venons de citer.

LXXXIII.

Second cas $r > s$ plus difficile.

Mais si p est un nombre entier négatif, alors $r > s$, & le dénominateur des termes de la formule (†) devenant $= 0$, avant que l'intégrale soit finie & exacte, cette formule ne fait rien connoître.

Le cas présent peut être représenté par $(a)\ \frac{gx^m dx}{\overline{a+bx^n}^p}$, où à cause que p est négatif, j'ai mis $\overline{a+bx^n}^p$ au dénominateur. Parce que $\frac{m+1}{n} = r$, on a $(a) = \frac{gx^{rn-1}dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{gx^{rn-n+n-1}dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{gx^{rn-n} \times x^{n-1}dx}{(a+bx^n)^p}$. Soit maintenant (Art. XVI.) $a+bx^n = z$, on aura $x^n = \frac{z-a}{b}$; $x^{n-1}dx = \frac{dz}{nb}$; $x^{rn-n} = \left\{\frac{z-a}{b}\right\}^{r-1}$; & enfin $\frac{gx^{rn-n} \times x^{n-1}dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{gdz}{nbz^p} \times \left\{\frac{z-a}{b}\right\}^{r-1} = \frac{g}{nb^r} \times \frac{\overline{z-a}^{r-1}dz}{z^p}$. Or comme

r eſt (hyp.) un nombre entier poſitif, $r-1$ en ſera un; par conſéquent pour avoir l'intégrale de $\frac{\overline{z-a}^{r-1}\,dz}{z^p}$, il ne faut qu'élever $z-a$ à la puiſſance $r-1$, & multiplier chaque terme par $\frac{dz}{z^p}$ pour en prendre enſuite l'intégrale.

Or comme p (hyp.) eſt $< r$, il s'enſuit que p ne ſauroit être que tout au plus $= r-1$; & comme la puiſſance $r-1$ de $z-a$ doit contenir toutes les puiſſances de z depuis z^{r-1} juſqu'à z^0 incluſivement, il s'enſuit qu'il y aura quelqu'un de ces termes dont la multiplication par $\frac{dz}{z^p}$ réduira la différentielle à $\frac{dz}{z}$ que nous avons démontré dépendre de la quadrature de l'hyperbole.

L'intégrale de quelqu'un des termes dépendra de la quadrature de l'hyperbole.

LXXXIV.

Je paſſe à la ſeconde formule (ω).

Dans cette formule ſi $s\left\{\frac{m+1}{-n}\right\}$ eſt égale à un nombre entier poſitif, elle a le même inconvénient que nous venons de remarquer dans la ſerie ($\downarrow$) pour un cas ſemblable (Art. LXXX.). Dans ce cas au lieu de faire uſage de cette formule (ω), on peut employer la ſerie (W) en ſe ſervant des remarques que nous avons faites ſur cette ſerie (Article XII. & ſuiv.).

Cas de s = un nombre entier poſitif, expliqué pour la ſeconde formule (ω) de l'intégrale des binomes.

Ce qu'il faut faire alors.

On pourra auſſi ſe ſervir de la formule ($\downarrow$) qui ne fera aucune difficulté, à moins que $\frac{m+1}{n} + p$ ne ſoit un nombre entier poſitif; mais en ce cas on remarquera que puiſque (hyp.) $\frac{m+1}{-n}$ eſt un nombre entier poſitif, & que

1°. s étant un nombre entier poſitif, & r ne l'étant pas.

$\frac{m+1}{n} + p$ en eſt auſſi un, il faut que p ſoit entier poſitif, & alors il n'y a plus de difficulté pour trouver l'intégrale.

LXXXV.

2°. r & s étant tous deux entiers poſitifs.

Si dans cette même formule r & s ſont tous deux des nombres entiers poſitifs & que $r < s$, alors on peut fort bien ſe ſervir de la formule (ω). D'ailleurs p eſt alors un nombre entier poſitif, & l'intégrale par conſéquent ſe trouve aiſément ſans le ſecours de la formule. La preuve en eſt la même que pour le cas ſemblable de la formule ($\downarrow$) (Art. LXXXII.).

Mais ſi $s\left\{\frac{m+1}{-n}\right\}$ eſt $< r\left\{\frac{m+1}{-n} - p\right\}$, ce qui rend $p =$ à un nombre entier négatif, alors la formule (ω) ne fait rien connoître, & il faut avoir recours à une autre méthode pour trouver l'intégrale.

LXXXVI.

Puiſque $\frac{m+1}{-n} = s$ que je ſuppoſe être un nombre entier poſitif, & que p eſt (hyp.) un nombre entier négatif, il s'enſuit que la différentielle, $x^m dx.(a+bx^n)^p$ peut être repréſentée par $\frac{x^{-sn-1}dx}{(a+bx^n)^p}$. Or ſuppoſons (Art. XLIII.) $x^n = \frac{1}{u}$, on a $x^{-sn-1}dx = -\frac{u^{s-1}du}{n}$; & $\frac{x^{-sn-1}dx}{(a+bx^n)^p} = -\frac{u^{s-1}du}{n} \times \frac{u^p}{(au+b)^p} = -\frac{u^{p+s-1}du}{n.(b+au)^p}$: comme p & s ſont des nombres entiers poſitifs, il eſt aiſé d'avoir l'intégrale en cette ſorte.

Soit

Soit $b + au = z$, on a $u = \frac{z-b}{a}$, & $- \frac{u^{p+s-1}\,du}{n.(b+au)^p} = -\frac{\frac{1}{n}\left\{\frac{z-b}{a}\right\}^{p+s-1}\frac{dz}{a}}{z^p} = -\frac{\frac{1}{n}.(z-b)^{p+s-1}\,dz}{a^{p+s}\,z^p}$, différentielle dont l'intégrale eſt facile, parce que $p + s - 1$ eſt un nombre entier poſitif ; & il eſt aiſé de prouver qu'il y aura quelques termes de cette intégrale qui dépendront de la quadrature de l'hyperbole.

CHAPITRE VII.

Seconde partie de la Méthode des différentielles binomes compriſes dans la formule $gx^m\,dx.(a+bx^n)^p$.

LXXXVII.

Contient les différentielles qui s'intégrent en ſuppoſant la quadrature ou la rectification d'une courbe.

CEtte ſeconde partie renferme les différentielles dont l'intégrale ſuppoſe la quadrature ou la rectification d'une courbe.

De la formation des deux formules précédentes, on peut en déduire deux autres pour trouver les intégrales finies des différentielles binomes que la premiere partie de la méthode ne donne point. Pour cela on ſuppoſe données les intégrales de quelques différentielles binomes, lorſqu'on n'en peut avoir d'exactes par les formules qui précédent.

Elle donne auſſi deux formules d'intégration.

Ces deux formules ſont aiſées à trouver par notre premiere transformation. On ſuppoſera pour abreger $u = g x (a + b x^n)^{p+1}$, & on écrira dans chacune des formules (ψ) & (ω) de la premiere partie, non-ſeulement les termes qui ſont chacun une intégrale, mais on écrira auſſi en parentheſe pour les diſtinguer, chacun dans leur rang, les autres termes qui ont fait découvrir les précédens, & qui ne ſont marqués que par $\int$ qui veut dire ſomme. Ces termes affectés du ſigne $\int$ étant ſuppoſés donnés, l'intégrale ſera exacte.

LXXXVIII.

Ce procédé nous donne les deux formules ſuivantes.

Premiere formule (Δ) *de la ſeconde partie de la Méthode.*

Premier terme de l'intégrale.

Répondante à la formule (ψ) de la premiere partie de cette méthode.

$$\int g x^m dx . (a + b x^n)^p = (\Delta) \left\{\frac{1}{m+1+np}\right\} . \frac{1}{b} u x^{m+1-n}$$

$$\underset{A}{\left(- \left\{\frac{m+1-n}{m+1+np}\right\} . \frac{a}{b} \int g x^{m-n} dx . (a + b x^n)^p \right)} -$$

Second terme de l'intégrale.

$$\left\{\frac{m+1-n}{m+1+np}\right\} . \left\{\frac{1}{m+1+np-n}\right\} . \frac{a}{bb} u x^{m+1-2n}$$

$$\underset{B}{\left(+ \left\{\frac{m+1-n}{m+1+np}\right\} . \left\{\frac{m+1-2n}{m+1+np-n}\right\} . \frac{aa}{bb} \int g x^{m-2n} dx \times \right.}$$

Troiſieme terme de l'intégrale.

$$\left. (a + b x^n)^p \right) + \left\{\frac{(m+1-n) . (m+1-2n) \times 1}{(m+1+np) . (m+1+np-n) . (m+1+np-2n)}\right\}$$

$$\frac{a^2}{b^3} u x^{m+1-3n} \left(- \left\{\frac{(m+1-n) . (m+1-2n)}{(m+1+np) . (m+1+np-n)}\right\} .\right.$$

$$\left\{\frac{m+1-3n}{m+1+np-2n}\right\}\cdot\frac{a^3}{b^3}\int g x^{m-3n}\,dx\,.\,(a+bx^n)^p - \&c.$$
C

Seconde formule (x) *de la ſeconde partie de la Méthode.*

Premier terme de l'intégrale. Répondante à la formule (ω) de la premiere partie.

$$\int g x^m\,dx\,.\,(a+bx^n)^p = (x)\ \frac{1}{m+1}\cdot\frac{1}{a}\ u x^{m+1}$$
a

$$\left\{ - \frac{(m+1+np+n)}{m+1}\times\frac{b}{a}\int g x^{m+n}\,dx\,.\,\overline{a+bx^n}^p\right\} -$$

Second terme de l'intégrale.

$$\frac{(m+1+np+n)\times 1}{(m+1)\,.\,(m+1+n)}\times\frac{b}{aa}\ u x^{m+1+n}\left\{ +\right.$$
b

$$\frac{(m+1+np+n)\,.\,(m+1+np+2n)}{(m+1)\,.\,(m+1+n)}\times\frac{bb}{aa}\times\int g x^{m+2n}\,dx\,\cdot$$

Troiſieme terme de l'intégrale.

$$\left.\overline{a+bx^n}^p\right\} + \frac{(m+1+np+n)\,.\,(m+1+np+2n)\times 1}{(m+1)\,.\,(m+1+n)\,.\,(m+1+2n}\times$$

$$\frac{b^2}{a^2}\times u x^{m+1+2n}\left\{ - \frac{(m+1+np+n)\,.\,(m+1+np+2n)}{(m+1)\,.\,(m+1+n)}\right.$$
c

$$\left.\times\frac{(m+1+np+3n)}{m+1+2n}\times\frac{b^3}{a^3}\int g x^{m+3n}\,dx\times\overline{a+bx^n}^p\right\} - \&c.$$

On peut continuer ces deux formules tant qu'on voudra, les termes qu'on voit ici ſuffiſent pour cela. On peut auſſi abréger les coefficiens, en donnant à *r* & à *s* les mêmes valeurs que dans les deux formules de la premiere partie. Nous les avons laiſſés ici tels que la ſeconde partie de notre méthode les donne immédiatement, afin que les commençans viſſent clairement la formation de ces deux formules.

Avant de faire voir l'uſage de ces formules, il eſt néceſſaire de donner quelques notions préparatoires.

Notions préparatoires à l'application des formules de la ſeconde partie de la Méthode.

LXXXIX.

On regarde une différentielle comme l'élément de la quadrature ou de la rectification d'une courbe.

Nous avons déja fait voir qu'une différentielle qui n'a qu'une changeante pouvoit être regardée comme l'élément de la quadrature d'une courbe ; c'eſt pour cela que dans le cas des deux dernieres formules on dit que l'intégrale dépend de la quadrature d'une courbe, & que cette quadrature étant ſuppoſée on a l'intégrale finie de la différentielle.

Et c'eſt d'ordinaire aux ſections coniques qu'on les applique.

Comme le cercle & les ſections coniques ſont les plus ſimples des courbes, & qu'elles ſont plus familieres, parce qu'on s'y eſt plus appliqué qu'aux autres, c'eſt d'ordinaire à leur quadrature ou à leur rectification, ſuppoſées connues, qu'on réduit les intégrales des différentielles qui ont pour intégrale quelques termes d'une intégrale exacte, & pour dernier terme l'expreſſion de la quadrature ou de la rectification d'une courbe.

XC.

Les formules (Δ) & (X) indiquent les différentielles qui ſont dans ce cas.

Les formules (Δ) & (X) font connoître quelles ſont les différentielles qui ſont dans ce cas, & font trouver les intégrales de ces différentielles. Pour le concevoir clairement, il faut avoir bien préſens les élémens de la quadrature & de la rectification des ſections coniques.

Nous allons donner ici une Table de ceux qui ſe rapportent à notre formule générale $gx^m\,dx.(a+bx^n)^p$, & la maniere de les trouver. Nous pourrions renvoyer à d'autres livres où elle eſt expliquée ; mais il ſera plus commode pour les lecteurs de l'avoir ici.

Méthode pour trouver les élémens des ſections coniques.

XCI.

PROBLEME I. Trouver les élémens de la rectification du cercle & des ſections coniques.

1°. Ceux de leur rectification.

SOLUTION. En nommant u l'arc de la courbe dont on cherche la longueur, du marquera chaque partie infiniment petite de cette courbe ; ſuppoſant de plus dans les courbes dont les ordonnées y ſont paralleles, qu'elles ſoient auſſi perpendiculaires aux coupées x, il eſt évident que chaque petit triangle dont du eſt l'hypothenuſe, dx & dy les côtés, eſt toujours rectangle ; par conſéquent on a pour la rectification du cercle & des ſections coniques cette formule générale :

$$du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Formule pour cette rectification.

XCII.

Lorſqu'on veut trouver la longueur d'une courbe ou d'une partie de cette courbe, il faut chercher par l'équation donnée de la courbe la valeur de dy^2 en x, dx, dx^2, ou la valeur de dx^2 en y, dy, dy^2 ; ſubſtituer l'une ou l'autre de ces valeurs dans la formule, & alors elle ſera changée en une quantité qui n'aura qu'une ſeule inconnue

Uſage de cette formule pour conſtruire une Table de ces élémens.

avec ſes différences, & qui ſera égale à du. Ce ſera l'équation de la rectification de la courbe : ſi cette équation eſt intégrable, la courbe eſt rectifiable ; autrement elle ne l'eſt pas. Soit, par exemple, $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, équation aux diametres conjugués de l'hyperbole, on a $y = \sqrt{\frac{b^2x^2 - a^2b^2}{aa}}$, donc $dy = \frac{bx\,dx}{a\sqrt{(xx-aa)}}$; $dy^2 = \frac{bbxx\,dx^2}{a^2x^2-a^4}$. Donc mettant dans la formule pour dy^2 cette valeur, on a $du = dx\sqrt{\left\{\frac{bbxx}{a^2x^2-a^4} + 1\right\}}$. C'eſt l'équation pour la rectification de l'hyperbole. Il en eſt ainſi des autres.

Par cette regle on conſtruit la Table ſuivante.

TABLE des élémens de la rectification du Cercle & de la Parabole.

1°. En ſuppoſant le rayon du cercle $= r$ & prenant l'origine des coordonnées x & y au centre du cercle, on a $y = \sqrt{rr - xx}$; donc $du = r\,dx\,.\,(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$.

2°. En prenant l'origine des coordonnées au ſommet, on a $y = \sqrt{2rx - xx}$; donc $du = r\,dx\,.\,(2rx-xx)^{-\frac{1}{2}}$.

3°. Dans la Parabole on a, comme on le ſait, $y = \sqrt{px}$; donc $du = \frac{x^{-1}\,dx}{2}\,.\,(px+4xx)^{\frac{1}{2}}$.

On trouve les autres par la même méthode ; mais comme nous l'avons déja remarqué, nous ne mettons ici que ceux qui ſe rapportent à la formule générale des binomes.

On pourroit joindre à cette Table les élémens des arcs de cercle par les Tangentes & par les Secantes que nous avons donnés dans l'Introduction, Articles XLI. & ſuivans.

XCIII.

PROBLEME 2. Trouver les élémens de la quadrature du cercle & des ſections coniques. 2°. Ceux de leur quadrature.

SOLUTION. On doit rapporter à deux cas la connoiſſance de l'aire des courbes. Le premier comprend celles dont les ordonnées ſont paralleles; on les ſuppoſe perpendiculaires aux coupées, afin que les élémens de l'aire ſoient de petits rectangles. Le ſecond cas renferme les courbes dont les ordonnées partent d'un même point, & leurs élémens ſont de petits triangles, dont chacun eſt compris entre deux ordonnées infiniment proches, & a pour baſe une partie infiniment petite de la courbe. Il faut diſtinguer deux cas.

Il y a des courbes qui peuvent appartenir aux deux cas, comme ſont le cercle, l'ellipſe & pluſieurs autres ſemblables. Car en ſuppoſant dans un demi cercle & dans une demie ellipſe les ordonnées infiniment proches perpendiculaires à l'axe, les élémens ſeront des rectangles; & en concevant du centre dans le cercle & dans l'ellipſe des rayons infiniment proches terminés à la courbe; & encore dans l'ellipſe concevant d'un des foyers des rayons tirés à l'ellipſe, les élémens ſont de petits ſecteurs. Cela poſé.

Premier cas. En nommant les coupées AB, x, les ordonnées BC, y; concevant une autre ordonnée bc infiniment proche de BC, la différence Bb (dx) de l'abſciſſe ſera la largeur de $CBbc$ qui eſt l'élément de l'aire ACB; l'ordonnée y ſera la baſe de ce petit rectangle. 1°. Courbes dont les ordonnées ſont paralleles.

Figure 42.

Formule pour ce cas.

= par conſéquent ydx. Donc nommant l'aire entiere ACB, E, on aura $dE = ydx$. C'eſt la formule pour le premier cas.

2°. Courbes dont les ordonnées partent du même point.

Second cas. Suppoſant que tous les rayons partent du même point B, les deux rayons BC, Bc étant tirés infiniment proches, formeront le petit triangle CBc qui eſt l'élément de l'aire de la courbe. Tirons du centre B avec le rayon BE un petit arc $Cd = dz$, qu'on pourra prendre pour une petite perpendiculaire menée du ſommet C ſur la baſe Bc (t) du petit triangle CBc, il eſt évident que $Cd \times \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} tdz$ ſera l'expreſſion du petit triangle CBc; nommant donc s l'aire entiere, on a $ds = \frac{1}{2} tdz$ pour la formule du ſecond cas.

Figure 5.

Formule pour ce ſecond cas.

Uſage de la premiere Formule $dE = ydx$.

Uſage des deux formules précédentes.

Par le moyen de l'équation de la courbe dont on cherche l'aire, il faut prendre la valeur de y en x, ou celle de x en y, ſubſtituer cette valeur dans la formule précédente, enſorte qu'elle ne contienne qu'une ſeule inconnue avec ſa différence. On aura alors l'élément de la courbe laquelle eſt quarrable, ſi la différentielle qui exprime cet élément eſt intégrable.

Uſage de la ſeconde Formule $ds = \frac{1}{2} tdz$.

Si on prend l'origine de x & de y, au point C; on aura BC ou $t = \sqrt{xx + yy}$; & $dz = \sqrt{du^2 - dt^2}$: or $du^2 =$ (Article XCI.) $dx^2 + dy^2$; donc $dz = \sqrt{dx^2 + dy^2 - dt^2}$. Donc mettant pour y ſa valeur en x, on

on aura la valeur de t, en x, celle de dz en dx, & celle de $\frac{1}{2}tdz$, en x & en dx.

XCIV.

Par cette méthode on conſtruit la Table ſuivante.

TABLE des élémens de l'aire du Cercle & des Sections coniques, qui ſe rapportent à la Formule $gx^m dx.(a+bx^n)^p$.

CERCLE.	ELLIPSE.	HYPERBOLE.
l'origine des coordonnées eſt au centre du	1°. D'un ſecteur d'Ellipſe, les coordonnées ayant leur origine au ſommet de l'axe.	Lorſque l'origine des coordonnées eſt au centre de la courbe.
ſegment de cercle $rr-xx)^{\frac{3}{2}}$.	$2a^{-\frac{1}{2}}dx.(2apx-pxx)^{\frac{3}{2}}$.	1°. D'un ſegment d'hyperbole équilatere par rapport à ſon premier axe . . . . $dx.(xx-aa)^{\frac{3}{2}}$.
ſecteur de cercle $.(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$.	2°. D'un ſecteur d'Ellipſe, les coordonnées ayant leur origine au centre de la courbe.	2°. De la même par rapport à ſon ſecond axe. . . . . $dx.(xx+aa)^{\frac{3}{2}}$.
e l'origine des ées eſt au ſommet	$\frac{1}{2}aapdx.(2a^3p-2apxx)^{-\frac{1}{2}}$.	3°. D'un ſegment d'hyperbole non équilatere par rapport au premier axe. $2a^{-\frac{1}{2}}dx.(pxx-aap)^{\frac{3}{2}}$.
ſegment de cercle $(2rx-xx)^{\frac{3}{2}}$.		4°. De la même par rapport à ſon ſecond axe. . . . . $2b^{-\frac{1}{2}}dx.(\pi xx+\pi bb)^{\frac{3}{2}}$.
ſecteur de cercle $.(2rx-xx)^{-\frac{1}{2}}$.		5°. D'un ſecteur d'hyperbole équilatere pour le premier axe . . . . . $\frac{1}{2}aadx.(xx-aa)^{-\frac{3}{2}}$.
RABOLE.		6°. Par rapport au ſecond axe. $\frac{1}{2}aadx.(aa+xx)^{-\frac{3}{2}}$.
ent de l'aire de be eſt $dx.(px)^{\frac{1}{2}}$, ait (Art. 11.) que e eſt $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$. Parabole eſt quar-		7°. D'un ſecteur d'hyperbole non équilatere pour le premier axe . . $\frac{3}{2}aapdx.(2apxx-2a^3p)^{-\frac{1}{2}}$.
		8°. Par rapport au ſecond axe. . . . . $\frac{3}{2}bb\pi dx.(2b^3\pi+2b\pi xx)^{-\frac{1}{2}}$.
		9°. D'un quadrilatere hyperbolique par rapport à l'aſymptote . . . . . $dx.(1\pm x)^{-1}$.
		Lorſque les coordonnées ont leur origine au ſommet.
		10°. D'un ſegment hyperbolique. $dx.\left(\frac{apx+pxx}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$.
		11°. D'un ſecteur hyperbolique. $\frac{adx}{4}.(ax+4xx)^{-\frac{1}{2}}$

COROLLAIRE.

L'élément de la rectification de la parabole eſt, comme on l'a vu dans la Table précédente, $\frac{dx}{2x}\sqrt{px+4xx}$: multipliant haut & bas cette différentielle par $\sqrt{px+4xx}$, j'ai $\frac{pxdx+4xxdx}{2x\sqrt{(px+4xx)}} = \frac{\frac{pdx+2xdx}{2}}{\sqrt{(px+4xx)}}$, dont l'intégrale eſt $\frac{\sqrt{(px+4xx)}}{2} + \int\frac{pdx}{4\sqrt{(px+4xx)}}$. Or cette derniere différentielle dépend de la quadrature d'un ſecteur hyperbolique dans lequel les coordonnées ont leur origine au ſommet; donc la rectification de la parabole & la quadrature de l'hyperbole ſont la même choſe.

XCV.

Obſervation ſur les Tables précédentes.

REMARQUE. On remarquera dans ces élémens pluſieurs ſortes de différentielles : les unes qui n'ont la changeante x qu'au ſecond terme du binome ſous le ſigne, ſont toutes réduites à la différentielle générale $gx^m dx.(a+bx^n)^p$.

Les autres contiennent la changeante x, au premier terme de la grandeur ſous le ſigne, & ont beſoin de préparation pour être ramenées à l'expreſſion générale de notre formule. Nous avons appris (Article LXIV.) à faire cette préparation.

Toutes ces choſes entendues, nous allons faire voir l'uſage des formules (Δ) & (x) pour connoître les différentielles dont les intégrales deviennent finies en ſuppoſant

les quadratures ou les rectifications des ſections coniques, & pour trouver ces intégrales.

Application des Formules (Δ) *&* (x) *de la ſeconde partie de la Méthode.*

XCVI.

Pour avoir la différentielle la plus ſimple dont l'intégrale dépend de la rectification ſuppoſée d'un arc de cercle, marquée par $(\alpha)\ \int r\,dx \times (rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$, il faut ſuppoſer que dans la formule (Δ) $(A)\ \int g x^{m-n}\,dx\,.\,(a+bx^n)^p$ eſt $(\alpha)\ \int r\,dx\,.\,(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$; mettre au lieu de g, a, b, n, p, leurs valeurs priſes de (α), & ne laiſſer d'indéterminée que m, on aura $(A) = r x^{m-2}\,dx\,.\,(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$: $m-2=0$ nous donnera $m=2$. Il faut mettre à préſent dans la différentielle générale $g x^m\,dx\,.\,(a+bx^n)^p$, les valeurs de toutes les lettres indéterminées, & on aura $\int r x^2\,dx\,.\,(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$ pour la différentielle la plus ſimple que donne la formule (Δ) dont l'intégrale dépend de la rectification ſuppoſée $\int r x^0\,dx\,.\,(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$.

1°. De la formule (Δ).

Premier exemple.

Pour trouver à préſent l'intégrale finie de la différentielle $r x^2\,dx\,.\,(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$, il faut ſubſtituer dans le terme (1) & (A) de la formule (Δ) les valeurs des lettres indéterminées priſes de $r x^2\,dx\,.\,(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$: $g=r$, $m=2$, $n=2$, $a=rr$, $b=-1$, $p=-\frac{1}{2}$; on a donc $\int r x^2\,dx\,.\,(rr-xx)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} r x^1 (rr-xx)^{\frac{1}{2}} +$

$\frac{1}{2}rr\int rdx.(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$. C'eſt l'intégrale de $rx^{2}dx.(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$.

XCVII.

Second exemple.

Pour avoir la différentielle plus compoſée d'un degré que la précédente, & dont l'intégrale finie dépend de la même rectification ſuppoſée d'un arc de circonférence, il faut ſuppoſer dans la formule (Δ) $(B)\int gx^{m-2n}dx.(a+bx^{n})^{p}=\int rx^{\circ}dx.(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$; & faiſant les mêmes opérations que dans le précédent exemple, on trouvera que $m=4$, & que la différentielle qui ſuit la plus ſimple, dont l'intégrale finie dépend de la même rectification, eſt $rx^{4}dx.(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$; effaçant le terme (A) de la formule (Δ) & mettant dans les termes 1, 2, B les valeurs des lettres indéterminées priſes de $rx^{4}dx(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$, on trouvera ſans peine que ſon intégrale finie eſt $-\frac{1}{4}rx^{3}.(rr-xx)^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{8}r^{3}x^{3}.(rr-xx)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8}r^{4}\int rdx.(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$.

XCVIII.

Et en général, il eſt évident, 1°. que ſi on met dans $gx^{m}dx.(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$ ſucceſſivement 2, 4, 6 & les autres nombres pairs poſitifs à la place de m, on aura de ſuite toutes les différentielles que peut donner la formule (Δ), dont les intégrales finies dépendent de la rectification ſuppoſée donnée d'un arc de circonférence marqué par $\int rdx.(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$.

2°. Qu'on aura l'intégrale de chacune en prenant autant de termes d'intégrales de la formule (Δ), que 2 ſe trouve de fois dans le nombre pair qu'on prend pour m, prenant de plus le terme qui les ſuit immédiatement & qui eſt marqué par l'une des lettres A, B, &c. avec ſon coefficient ; & enfin ſubſtituant dans tous ces termes les valeurs des indéterminées, priſes dans $rx^m dx.(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$, où au lieu de m on aura mis le nombre pair donné.

Ce ſera la même choſe, quand $m=0$.

XCIX.

2°. Application de la formule (X).

Si on vouloit, avec le Pere Reyneau, ſe ſervir de la ſeconde formule (x) de cette partie de la méthode, comme on a fait de la premiere (Δ), on trouveroit en mettant ſucceſſivement dans $rx^m dx.(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$, au lieu de m les nombres pairs négatifs -2, -4, -6, &c. toutes les différentielles que peut donner cette formule (Δ) ; & on ſeroit porté à croire, comme le P. Reyneau l'a cru, que ces intégrales dépendroient de la rectification ſuppoſée donnée d'un arc de cercle exprimé par $\int rdx.(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$.

Mais en ſuivant cette méthode ſans reſtriction, on courroit riſque de tomber dans l'erreur. Nous allons faire quelques réflexions qui apprendront à s'en garantir.

Défaut de la ſeconde partie de la méthode précédente.

CHAPITRE VIII.

Examen des différentielles qui, ſuivant la ſeconde partie de la Méthode des Binomes, dépendent de la rectification, ou de la quadrature du Cercle.

C.

$x^m dx . (rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$, m étant un nombre pair négatif, eſt intégrable abſolument.

LA Méthode précédente nous laiſſe croire que les différentielles repréſentées par $x^m dx . (rr-xx)^{-\frac{1}{2}}$, m étant un nombre pair poſitif ou négatif, dépendent toutes de la rectification ſuppoſée donnée d'un arc de cercle. Cependant lorſque dans la quantité précédente m eſt un nombre pair négatif, ces différentielles ne dépendent point de la rectification du cercle, mais elles ſont intégrables abſolument.

Démonſtration de cette propoſition.

DÉM. Pour le prouver, ſoit $m = -2f$ (f eſt un nombre entier poſitif quelconque), on a $gx^m dx . (rr-xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{g\,dx}{x^{2f}\sqrt{rr-xx}}$. Je fais ſuivant la transformation enſeignée (Art. XLIII.) $x = \frac{rr}{u}$; j'aurai $dx = -\frac{rr\,du}{uu}$, $x^{2f} = \frac{r^{4f}}{u^{2f}}$, $\sqrt{rr-xx} = \sqrt{rr-\frac{r^4}{uu}} = \frac{r}{u}\sqrt{uu-rr}$; & par conſéquent on a $\frac{g\,dx}{x^{2f}\sqrt{rr-xx}} = -\frac{grr}{uu}\,du \times \frac{u^{2f}}{r^{4f}} \left\{\frac{u}{r\sqrt{uu-rr}}\right\} = -\frac{g\,u^{2f-1}\,du}{r^{4f-1}\sqrt{uu-rr}}$, quantité qui eſt

abſolument intégrable. Car en la rapportant à la formule (ϕ), on a . . . . . $m = 2f-1$

$n = 2$

$p = -\frac{1}{2}$

donc $\frac{m+1}{n} = f$; or f eſt un nombre entier poſitif, donc (Art. LXXIX.) cette quantité eſt intégrable abſolument.

CI.

On peut encore s'en aſſurer autrement. Pour cela il n'y a qu'à ſe ſervir de notre premiere transformation. $\left\{ \frac{g}{r^{4f-1}} \right.$ étant des conſtantes, nous pouvons les laiſſer un inſtant pour rendre le calcul plus ſimple $\left. \right\}$. Afin de faire ſur $\frac{u^{2f-1}du}{\sqrt{uu-rr}}$ la premiere transformation, je la prépare ainſi: $\frac{u^{2f-1}du}{\sqrt{uu-rr}} = \frac{u^{2f-2+1}du}{\sqrt{uu-rr}} = \frac{u^{2f-2} \times udu}{\sqrt{uu-rr}}$ (on ſentira aiſément l'eſprit de cette préparation, en réfléchiſſant ſur les opérations que demande notre premiere transformation.) Soit à préſent $uu-rr = zz$, on a $uu = zz+rr$; $u^{2(f-1)} = (zz+rr)^{f-1}$, & $\sqrt{uu-rr} = z$. D'ailleurs $zdz = udu$: donc la transformée eſt $(zz+rr)^{f-1}dz$, qui eſt aiſément intégrable par la regle fondamentale (Art. XI.) en élevant $zz+rr$ à la puiſſance $f-1$, & multipliant chaque terme par dz.

Autre maniere de s'en aſſurer.

CII.

Mais afin qu'il ne reſte aucune difficulté ſur cette propoſition, nous allons concilier une contradiction apparente

Contradiction apparente.

qui pourroit embarraſſer les commençans dans la pratique de la méthode précédente.

En effet ſi on jette les yeux ſur la formule (γ) de l'Art. LXXV. on trouve l'intégrale de $gx^m\,dx.(a+bx^n)^p$ exprimée en cette ſorte.

$$\int gx^m\,dx.(a+bx^n)^p = \frac{1}{m+1}\times\frac{g}{a}\,x^{m+1}.(a+bx^n)^{p+1}$$
$$-\left\{\frac{m+1+np+n}{m+1}\right\}\frac{bg}{a}\int gx^{m+n}\,dx.(a+bx^n)^p - \&c.$$

Lorſque . . . . . $a = rr$,
$b = -1$
$n = 2$
$p = -\frac{1}{2}$
& . . . . . $m = -2f$

qui eſt le cas de notre différentielle $\frac{dx}{x^{2f}\sqrt{rr-xx}}$, cette intégrale devient celle-ci : $\int\frac{g\,dx}{x^{2f}\sqrt{rr-xx}} = \frac{1}{-2f+1}\times\frac{g}{rr}$
$x^{-2f+1}.(rr-xx)^{\frac{1}{2}} - \left\{\frac{-2f+2}{-2f+1}\right\}\frac{g}{rr}\int\frac{gx^{-2f+2}\,dx}{\sqrt{rr-xx}}$.

Si $f=1$, ce qui rend $\frac{g\,dx}{x^{2f}\sqrt{rr-xx}} = \frac{g\,dx}{x^2\sqrt{rr-xx}}$, la quantité $\int\frac{gx^{-2f+2}\,dx}{\sqrt{rr-xx}}$ devient $\int\frac{g\,dx}{\sqrt{rr-xx}}$ qui, comme nous l'avons vu, dépend de la rectification du cercle. L'intégrale entiere de $\frac{g\,dx}{x^2\sqrt{rr-xx}}$ paroît donc dépendre de cette rectification, ce qui ſeroit contraire à ce que nous venons de dire.

CIII.

Maniere de lever cette contradiction.

Mais il faut obſerver qu'alors le coefficient $\frac{-2f+2}{-2f+1}$ qui multiplie

multiplie $\int \frac{g x^{-2f+2} dx}{\sqrt{rr-xx}}$ devient = o, de façon que toute cette quantité s'évanouit : on a donc l'intégrale complete de $\frac{f dx}{x^2 \sqrt{rr-xx}}$ exprimée en cette ſorte $\frac{-g}{rrx} \sqrt{rr-xx}$.

En effet, ſi on prend ſuivant les regles ordinaires la différentielle de $\frac{-g}{rrx} \sqrt{rr-xx}$, on trouvera que c'eſt préciſément $\frac{g dx}{x^2 \sqrt{rr-xx}}$.

Ainſi cette quantité différentielle ne dépend point de la rectification du cercle, parce que les intégrales liées avec cette rectification, que l'intégrale de $\frac{g dx}{x^2 \sqrt{rr-xx}}$ paroît renfermer, ſont multipliées par un coefficient qui eſt égal à zéro ; elles diſparoiſſent par conſéquent dans cette intégrale qui reſte finie, exacte & indépendante de la rectification du cercle.

CIV.

Examen 1°. des quantités qui ſe rapportent à la quadrature du cercle exprimée par $\int dx \sqrt{rr-xx}$.

Si on ſe ſert de la méthode précédente du P. Reyneau pour trouver les quantités différentielles qui ſe rapportent à la quadrature du cercle exprimée par $\int dx \sqrt{rr-xx}$, on trouvera ſans peine que toutes les quantités $x^m dx \sqrt{rr-xx}$, & $\frac{dx \sqrt{rr-xx}}{x^m}$, dans leſquelles m eſt un nombre entier poſitif, ſe rapportent à cette quadrature. Examinons les cas dans leſquels cette méthode nous induiroit en erreur.

1°. Pour les quantités $x^m dx \sqrt{rr-xx}$, il n'y a aucune difficulté. Car on a $x^m dx \sqrt{rr-xx} = \frac{x^m dx (rr-xx)}{\sqrt{rr-xx}}$

$= \frac{rrx^m dx}{\sqrt{rr-xx}} - \frac{x^{m+2}dx}{\sqrt{rr-xx}}$ dont les deux parties dépendent de la rectification ou de la quadrature du cercle (Art. XCVIII.)

2°. A l'égard des quantités $\frac{dx\sqrt{rr-xx}}{x^m}$, on a $\frac{dx\sqrt{rr-xx}}{x^m}$ $= \frac{dx(rr-xx)}{x^m\sqrt{rr-xx}} = \frac{rrdx}{x^m\sqrt{rr-xx}} - \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{rr-xx}}$, dont la premiere partie eſt intégrable abſolument, ainſi que nous l'avons prouvé (Art. C.) & la ſeconde partie l'eſt auſſi, à moins que m ne ſoit $= 2$, auquel cas elle devient $\frac{-dx}{\sqrt{rr-xx}}$ qui dépend de la quadrature du cercle. D'où il ſuit que de toutes les quantités $\frac{dx\sqrt{rr-xx}}{x^m}$ il n'y a que la ſeule différentielle $x^{-2}\,dx\sqrt{rr-xx}$ dont l'intégration dépende de la quadrature du cercle; toutes les autres ſont abſolument intégrables.

CV.

2°. Des différentielles dépendantes de la quadrature du cercle exprimée par $\int\frac{dx}{\sqrt{ax-xx}}$.

Suivant la même méthode ſi on cherche les quantités dont l'intégration eſt liée avec la quadrature du cercle exprimée par $\int\frac{dx}{\sqrt{ax-xx}}$, on trouvera :

1°. Que les quantités $\frac{x^{f+\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a-x}}$ ſe rapportent à cette quadrature, ſi f eſt un nombre entier poſitif. En effet, ſi on prend $\frac{zz}{a} = x$, on aura après les ſubſtitutions & transformations ordinaires $\frac{x^{f+\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a-x}} = \frac{2.z^{2f+2}dz}{a^{f+1}\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{aa-zz}}$ $= \frac{2.z^{2f+2}dz}{a^{f+1}\sqrt{aa-zz}}$ qui dépend de la quadrature du cercle (Art. XCVIII.).

2°. On croiroit auſſi à la premiere vue, que les différentielles $\frac{dx}{x^{f+\frac{1}{2}}\sqrt{a-x}}$ dépendent de cette quadrature.

Mais ſi on rapporte ces quantités avec la différentielle générale $gx^m dx \cdot (a+bx^n)^p$, on trouvera

$$n = 1$$
$$m = -f-\tfrac{1}{2}$$
$$p = -\tfrac{1}{2}$$

Donc ..... $\frac{m+1}{-n} - p = \underset{1}{\underline{f+\frac{1}{2}-1}} + \frac{1}{2} = f.$

Mais f eſt ici un nombre entier poſitif. Or par la formule (ω) quand $\frac{m+1}{-n} - p$ eſt égal à un nombre entier poſitif, la différentielle eſt abſolument intégrable. Donc les quantités $\frac{dx}{x^{f+\frac{1}{2}}\sqrt{(a-x)}}$ paroiſſent en même temps intégrables & dépendantes de la quadrature du cercle.

Pour lever cette contradiction, ſoit $x = \frac{zz}{a}$, on a $\frac{dx}{x^{f+\frac{1}{2}}\sqrt{a-x}} = \frac{2zdz}{a} \times \frac{a^f\sqrt{a}}{z^{2f+1}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{aa-zz}} = \frac{2a^f dz}{z^{2f}\sqrt{aa-zz}}$ quantité que nous venons de démontrer (Art. C.) être abſolument intégrable.

Solution d'une contradiction apparente.

CVI.

Il y a encore quelques différentielles qui ſe rapportent à la quadrature du cercle. Par exemple, $\frac{rrdx}{x\sqrt{xx-rr}}$ eſt l'élément d'un arc de cercle dont r eſt le rayon & x la ſecante.

3°. Des différentielles dont l'intégrale dépend de la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{rrdx}{x\sqrt{xx-rr}}$.

En ſuivant toujours la méthode du P. Reyneau on trouveroit que les quantités $\frac{x^m dx}{\sqrt{(xx-rr)}}$ & $\frac{dx}{x^m\sqrt{(xx-rr)}}$ dans

lesquelles m est un nombre impair positif, se rapportent à la différentielle $\frac{rrdx}{x\sqrt{xx-rr}}$ & dépendent par conséquent de la quadrature du cercle.

1°. Les quantités $\frac{x^m dx}{\sqrt{(xx-rr)}}$, lorsque m est un nombre impair positif, sont absolument intégrables par la formule (†) de la premiere partie de la méthode ; puisque dans ce cas $\frac{m+1}{n}$ est égal à un nombre entier positif.

2°. Pour ce qui regarde les quantités $\frac{dx}{x^m\sqrt{(xx-rr)}}$, soit $x=\frac{rr}{z}$, on a $\frac{dx}{x^m\sqrt{xx-rr}} = \frac{-rrdz}{zz} \times \frac{z^m}{r^{2m}} \times \frac{z}{r\sqrt{rr-zz}}$ $= \frac{-z^{m-1}dz}{r^{2m-1}\sqrt{rr-zz}}$, différentielle qui dépend (Art. XCVII.) de la quadrature du cercle, à cause que $m-1$ est un nombre pair positif.

CVII.

4°. Enfin des différentielles dépendantes de la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{rrdx}{rr+xx}$.

On trouveroit enfin que les différentielles $\frac{x^m dx}{rr+xx}$, & $\frac{dx}{x^m\cdot(rr+xx)}$, dans lesquelles m est un nombre pair positif, se rapportent à la différentielle $\frac{rrdx}{rr+xx}$ que l'on peut voir (Probl. 2. Art. XCIII.) être l'élément d'un arc de cercle dont r est le rayon & x la tangente. Mais on peut encore s'assurer d'une autre maniere, que ces quantités dépendent de la quadrature du cercle.

1°. Pour réduire les quantités $\frac{x^m dx}{rr+xx}$ à la quadrature du cercle, je fais $rr+xx=zz$, & j'ai après les substitutions ordinaires $\frac{x^m dx}{rr+xx} = \frac{(zz-rr)^{\frac{m}{2}} zdz}{zz\sqrt{zz-rr}}$ qui dépend

évidemment de la quadrature du cercle. Car ſoit, par exemple, $m = 2$, on a $\frac{(zz-rr)^{\frac{m}{2}} z\,dz}{z^2\sqrt{zz-rr}} = \frac{z\,dz}{\sqrt{zz-rr}} - \frac{rr\,dz}{z\sqrt{zz-rr}}$ dont la premiere partie s'integre tout de ſuite par la regle fondamentale, ſon intégrale étant $\sqrt{zz-rr}$, & dont la ſeconde partie dépend de la quadrature du cercle, ainſi que nous venons de le voir dans l'article précédent.

2°. A l'égard des quantités $\frac{dx}{x^m \cdot (rr+xx)}$, ſi on fait $\frac{1}{x} = z$, après avoir pratiqué les différentes ſubſtitutions que donne cette transformation, on les changera en $\frac{-z^m dz}{rr(zz+rr)}$ qui dépend de la quadrature du cercle, comme on vient de le remarquer.

CVIII.

COROLLAIRE 1. De tout ce que nous venons de dire dans les articles précédens, il s'enſuit qu'il ne faut employer la ſeconde partie de la méthode des binomes qu'avec précaution. Lorſque cette méthode donne quelques différentielles qui ſe rapportent à la quadrature ou à la rectification d'une courbe, pour s'aſſurer qu'elle n'induit point en erreur, il faut comparer la différentielle propoſée avec les formules (↓) & (ω) de la premiere partie de cette même méthode, & voir par le moyen des remarques que nous venons de faire, ſi ſon intégrale priſe en ſuivant ces formules n'eſt pas finie & exacte. On remarquera auſſi la grande facilité que donnent pour toutes ces opérations

Reflexion importante ſur l'uſage qu'on doit faire de ce qui précede.

les transformations que nous avons détaillées dans le Chapitre ſecond, par l'uſage continuel que nous en avons fait dans celui-ci. Il eſt bon d'obſerver encore la maniere dont quelquefois nous préparons les quantités pour démêler plus aiſément ce qu'elles ſont, & les rendre plus ſuſceptibles du calcul.

CIX.

COROLLAIRE 2. Il n'eſt pas difficile d'appliquer la théorie précédente aux différentielles qui ſuppoſent la quadrature ou la rectification de l'hyperbole ou des autres ſections coniques. Nous verrons plus bas en parlant des différentielles logarithmiques & exponentielles, & des fractions rationelles, d'autres différentielles qui dépendent de la quadrature du cercle & de l'hyperbole. Nous traiterons auſſi ſéparément des différentielles qui ſe rapportent à la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole.

CX.

COROLLAIRE 3. La différentielle $\frac{x^{\theta} dx}{1 \pm x}$ dépend de $\frac{dx}{1 \pm x}$, θ étant un nombre entier poſitif ou négatif. Cette propoſition peut ſe prouver de la même maniere que les précédentes. Mais nous ne nous arrêterons pas à développer ici ce cas qui dépend de la quadrature de l'hyperbole. Nous le traiterons plus bas à l'article des fractions rationelles. Paſſons aux différentielles trinomes.

CHAPITRE IX.

Application de la Méthode des Binomes aux différentielles trinomes représentées par la formule $gx^m dx . (a+bx^n+cx^{2n})^p$ *ou* $gx^{m+2np} dx . (c+bx^{-n}+ax^{-2n})^p$.

CXI.

Soit d'abord pris la premiere forme de la formule dans laquelle les expoſans de la changeante ſous le ſigne ſont poſitifs, on ſe conduira à peu près de la même façon que pour les binomes. On multipliera la partie hors du ſigne par x^q, & on diviſera par la même quantité la partie ſous le ſigne : cette opération donnera $gx^m dx . (a+bx^n+cx^{2n})^p = gx^{m+q} dx . (ax^{-\frac{q}{p}}+bx^{n-\frac{q}{p}}+cx^{2n-\frac{q}{p}})^p$. Enſuite l'on déterminera la valeur de q, en ſuppoſant $m+q = -\frac{q}{p}-1$ & non pas $m+q = 2n-\frac{q}{p}-1$, ni $m+q = n-\frac{q}{p}-1$. Car ces deux dernieres ſuppoſitions pourroient former quelque embarras.

1°. Pour les différentielles qui s'intégrent algébriquement.

Le procédé eſt à peu près le meme que pour les binomes.

Celle de $m+q = -\frac{q}{p}-1$ donne $q = -\frac{mp-p}{p+1}$, & ſubſtituant cette valeur de q dans l'équation précédente, elle devient $gx^m dx . (a+bx^n+cx^{2n})^p = gx^{\frac{m-p}{p+1}} dx . \left\{ ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}} \right\}^p$.

A préſent je ſuppoſe $z = ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}}$, je prends les valeurs de z^p, de dz, &c. je fais les mêmes ſubſtitutions que dans les binomes, & je trouve d'abord : Premier terme de l'intégrale.

$$\int g x^m dx \cdot (a + bx^n + cx^{2n})^p = \left\{\frac{1}{m+1}\right\} \times \frac{1}{a} \cdot g x^{m+1} \times (a + bx^n + cx^{2n})^{p+1} - \left\{\frac{m+1+np+n}{m+1}\right\} \times \frac{b}{a} \underbrace{\int g x^{m+n} dx \times (a + bx^n + cx^{2n})^p}_{A} - \left\{\frac{m+1+2np+2n}{m+1}\right\} \times \frac{c}{a} \underbrace{\int g x^{m+2n} dx \times (a + bx^n + cx^{2n})^p}_{B}.$$

Or dans cette expreſſion j'ai déja le premier terme de la ſerie qui eſt la formule générale de l'intégrale des différentielles trinomes : j'ai de plus le moyen de trouver de ſuite tous les autres termes par de ſimples ſubſtitutions.

CXII.

Ainſi ſi je veux avoir le ſecond terme, je ſubſtitue dans le premier terme $m+n$ à la place de m dans A & dans B & leurs coefficiens : il me vient par ces ſubſtitutions trois quantités que je multiplie par le coefficient de A. Cette opération me donne le ſecond terme de l'intégrale.

Second terme de l'intégrale.

$$- \left\{\frac{(m+1+np+n) \times 1}{(m+1) \cdot (m+1+n)}\right\} \frac{b}{aa} g x^{m+1+n} \times (a + bx^n + cx^{2n})^{p+1} + \left\{\frac{(m+1+np+n) \cdot (m+1+np+2n)}{(m+1) \cdot (m+1+n)}\right\} \times \frac{bb}{aa} \cdot$$

$\int g x$

$$\int g x^{m+2n} dx \cdot (a+bx^n+cx^{2n})^p + \frac{(m+1+np+n)}{m+1} \cdot \left\{\frac{m+1+2np+3n}{m+1+n}\right\} \times \frac{bc}{aa} \int g x^{m+3n} dx \cdot (a+bx^n+cx^{2n})^p$$

C D

CXIII.

Je passe au troisieme terme. Pour le trouver je n'en fais qu'un seul de B & de C, en réduisant le coefficient de B au dénominateur de C, ce qui donnera

$$-\left\{\frac{(m+1+2np+2n)\cdot(m+1+n)}{(m+1)\cdot\times(m+1+n)} \times \frac{ac}{aa} + \frac{(m+1+np+n)\cdot(m+1+np+2n)}{(m+1)\cdot(m+1+n)} \times \frac{bb}{aa}\right\} \times \int g x^{m+2n} \quad \text{E}$$

$dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p$. Je substitue maintenant dans le premier terme dans A & B, $m+2n$ à la place de m dans les exposans & les coefficiens: puis je multiplie les trois quantités que cette opération me donne par le coefficient de E; on aura en nommant pour abreger k le coefficient de E.

Troisieme terme de l'intégrale.

$$k \cdot \left\{\frac{1}{m+1+2n}\right\} \frac{1}{a} \times g x^{m+1+2n} \times (a+bx^n+cx^{2n})^{p+1} - k \cdot \left\{\frac{m+1+np+3n}{m+1+2n}\right\} \times \frac{b}{a} \int g x^{m+3n} \quad \text{F}\ dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p - k \cdot \left\{\frac{m+1+2np+4n}{m+1+2n}\right\} \times \frac{c}{a} \int g x^{m+4n} \quad \text{G}\ dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p$$

, & ainsi de suite pour le quatrieme, cinquieme, &c. termes de cette serie.

CXIV.

La même méthode nous donnera une formule pour la ſeconde forme de la formule des différentielles trinomes dans laquelle les expoſans de n ſont négatifs.

CXV.

2°. Pour les différentielles trinomes dépendantes de la quadrature ou de la rectification des ſections coniques.

Nous avons vu comment on trouvoit les intégrales des différentielles binomes qui dépendent de la quadrature ou de la rectification des ſections coniques ; on trouvera par la même méthode les intégrales des différentielles trinomes qui peuvent auſſi s'y rapporter. Nous ne nous y arrêterons pas ici. Nous nous contenterons d'obſerver que de même que l'intégrale d'une différentielle binome ſe trouve en ſuppoſant celle d'une différentielle du même ordre, l'intégrale d'une trinome ſe trouvera en ſuppoſant celle de deux ; l'intégrale d'une quatrinome ſe trouvera en ſuppoſant celle de trois, & ainſi de ſuite.

CXVI.

On formeroit de même des formules pour les différentielles qui ont quatre, cinq, &c. tant de termes qu'on voudra avec les conditions précédentes. Les lecteurs ſont à préſent en état de les former eux-mêmes ; ils n'auront d'autre difficulté à eſſuyer que la longueur du calcul.

CHAPITRE X.

Regles du Calcul intégral des fractions rationelles.

CXVII.

AVant d'entrer dans la théorie du Calcul intégral des fractions rationelles, il faut ſe rappeller ce que nous avons trouvé (Introduction Art. XVIII.) que la différence du logarithme d'une quantité, eſt la différentielle de cette quantité, diviſée par la quantité même : d'où il ſuit que *l'intégrale d'une différentielle logarithmique, eſt le logarithme de la quantité qui la diviſe.*

Regle générale pour trouver l'intégrale des différentielles logarithmiques.

Ainſi l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ eſt $lx + P$; & ſi cette intégrale devient nulle, lorſque x eſt égale à une quantité conſtante, a par exemple, on aura $lx = la$, donc $P = -la$. Donc alors $\int \frac{dx}{x} = lx - la = l\frac{x}{a}$.

Application à des exemples.

En ſuivant la même regle on trouvera $\int \frac{-dx}{x} = -lx =$ (Art. IV.) $l\frac{1}{x}$ & $\int \frac{-dx}{1+x} = -l\overline{1+x} = l\frac{1}{1+x}$.

CXVIII.

En général, toutes les fois que le numérateur d'une fraction eſt la différentielle même du dénominateur, ou multiple ou ſous-multiple de cette différentielle, l'intégrale ſera le logarithme du dénominateur ou un multiple ou un ſous-multiple.

Ainſi l'intégrale de $\frac{\pm 2xdx}{aa \pm xx}$ eſt $l(aa \pm xx)$; celle de $\frac{\pm 3x^2dx}{a^3 \pm x^3}$ eſt $l(a^3 \pm x^3)$. De même $\int \frac{4xdx}{aa+xx} = 2l(aa+xx)$, c'eſt-à-dire $= l(aa+xx)^2$. $\int \frac{xdx}{aa+xx} = \frac{1}{2} l(aa+xx)$ ou $l(aa+xx)^{\frac{1}{2}}$. Enfin $\int \frac{\pm mx^{n-1}dx}{a^n \pm x^n} = \pm \frac{m}{n} l(a^n \pm x^n) = \pm l(a^n \pm x^n)^{\frac{m}{n}}$.

CXIX.

Addition de la conſtante pour compléter l'intégrale.

AVERTISSEMENT. On doit ſe ſouvenir qu'en intégrant les différentielles logarithmiques, il faut quelquefois ajouter une conſtante à l'intégrale trouvée pour la rendre complette. Cette conſtante ſe déterminera par la méthode que nous avons donné (Chap. III.) pour les différentielles ordinaires.

CXX.

SCHOLIE. Il y a des cas dans leſquels l'intégrale des différentielles logarithmiques ne ſe préſente pas auſſi facilement que celle des précédentes : ſouvent même on a beſoin d'art & de préparation pour reconnoître qu'une différentielle eſt logarithmique. Nous allons traiter de ces cas en donnant les méthodes par leſquelles on integre les fractions rationelles.

CXXI.

Définition des fractions rationelles.

On entend par fraction rationelle, celle dont le numérateur & le dénominateur ſont des quantités ſans radicaux. Telles ſont, par exemple, celles-ci $\frac{xdx}{xx+2bx+aa}$, $\frac{bdx+cxdx}{ex^3+gx^2+hx+f}$.

CXXII.

Les plus ſimples des fractions rationelles ſont celles dont le dénominateur eſt x, enſuite celles dont le dénominateur eſt $x+a$: nous avons vu plus haut comment on les intégroit ; enfin celles dont le dénominateur eſt $xx+fx+g$: ſoit que les racines ſoient réelles ou imaginaires, ou en partie réelles & en partie imaginaires. Nous donnerons dans la ſuite des méthodes pour intégrer ces dernieres.

CXXIII.

La difficulté ſe réduit aux cas où la plus haute puiſſance du numérateur eſt moindre que celle du dénominateur : car lorſque l'expoſant eſt plus petit dans le dénominateur, on peut faire la diviſion juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à un reſte qui ſoit dans le premier cas.

En ſuppoſant cette diviſion faite, ſoit ce reſte repréſenté par $\frac{p}{q}\,dx$, M. Bernoulli a donné dans les Mémoires de l'Académie 1702, p. 289, une méthode pour intégrer ces fractions rationelles. Nous allons d'abord la rapporter telle que nous l'a donnée ce grand Géometre. Nous ajouterons enſuite ce qui eſt néceſſaire pour qu'elle ait la plus grande généralité poſſible.

Expoſition de la méthode de M. Bernoulli pour les intégrer.

CXXIV.

Probleme 1. Intégrer les différentielles $\frac{p}{q}\,dx$ dans leſquelles p & q expriment des quantités rationelles compoſées

comme on voudra d'une ſeule variable x & de conſtantes; ou du moins les réduire à la quadrature de l'hyperbole ou du cercle, l'un ou l'autre étant toujours poſſible.

SOLUTION. Soit p diviſé par q, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à un reſte plus petit que q ; cette opération réduit la différentielle en deux parties, dont la premiere ſera le quotient commenſurable venu de la diviſion, & la ſeconde ſera le reſte de la diviſion, chacune multipliée par dx. Il eſt évident qu'on peut toujours trouver l'intégrale de la premiere partie, puiſque ce quotient ne contiendra dans ſes différens termes que des puiſſances de x ſans aucune fraction. Il ne s'agit donc que de trouver l'intégrale du reſte qu'on ſuppoſe repréſenté par $\frac{r}{q}\,dx$ (ſi r & q avoient quelque diviſeur commun, il faudroit pour abreger les diviſer par ce diviſeur.)

Je ſuppoſe $\frac{r}{q}\,dx = \frac{a\,dx}{x+f} + \frac{b\,dx}{x+g} + \frac{c\,dx}{x+h} +$ &c. c'eſt-à-dire, $\frac{r}{q}\,dx$ égale à autant de différentielles logarithmiques que la plus grande dimenſion de x dans q a d'unités; a, b, c, de même que f, g, h, ſont des conſtantes indéterminées, telles que $x+f$, $x+g$, $x+h$ &c. ſoient les racines du dénominateur.

Pour avoir les valeurs de ces conſtantes indéterminées, il faut réduire la ſomme $\frac{a\,dx}{x+f} + \frac{b\,dx}{x+g} + \frac{c\,dx}{x+h}$ à un dénominateur commun le plus petit qu'il ſoit poſſible, & il eſt évident que la plus haute dimenſion de x ſera la même dans le dénominateur de cette ſomme & dans q; & ſi la plus haute dimenſion de x dans le numérateur ſurpaſſoit

celle de x dans r, il faudroit ſuppoſer les termes qui manquent dans r chacuns multipliés par zéro. Par cette opération le numérateur & le dénominateur de la ſomme auront le même nombre de termes que $\frac{r}{q}\,dx$. Cela fait, il faut égaler entr'eux les termes correſpondans tant des numérateurs que des dénominateurs de la propoſée & de la ſomme, ce qui donnera autant d'équations qu'il y a de coefficiens indéterminés a, b, &c. Car pour les coefficiens f, g, h, ils ſeront connus en remarquant que ces coefficiens ſont les racines du dénominateur, & en déterminant ces racines à l'ordinaire par les regles que donne la Géométrie pour réſoudre les équations : nous en parlerons même plus au long dans la ſuite. A préſent il faut ſubſtituer ces valeurs à la place des indéterminées dans $\frac{a\,dx}{x+f} + \frac{b\,dx}{x+g} +$ &c. & elles deviendront les différentielles logarithmiques dont on a beſoin.

On ſait (Art. CXVII.) que $\frac{dx}{x+f} + \frac{dx}{x+g} + \frac{dx}{x+h}$ ſont les différentielles des logarithmes de $x+f$, $x+g$, $x+h$. Ainſi $\int\frac{dx}{x+f} + \int\frac{dx}{x+g} + \int\frac{dx}{x+h} = l\,(x+f) + l\,(x+g) + l\,(x+h)$. Donc $\int\frac{a\,dx}{x+f} + \frac{b\,dx}{x+g} + \frac{c\,dx}{x+h} = a \times l\,\overline{x+f} + b \times l\,\overline{x+g} + c \times l\,\overline{x+h} =$ (Art. VII. Introduct.) $l\,\overline{x+f}^{a} + l\,\overline{x+g}^{b} + l\,\overline{x+h}^{c}$. Donc parce que la ſomme des logarithmes de pluſieurs grandeurs eſt égale au ſeul logarithme du produit de ces grandeurs, on a $\int\frac{r}{q}\,dx = l\,(\overline{x+f}^{a} \times \overline{x+g}^{b} \times \overline{x+h}^{c})$.

CXXV.

COROLLAIRE. On voit par-là comment les équations différentielles rationelles, ou qui par les transformations du Chap. III. peuvent devenir rationelles, ſe réduiſent à des équations exponentielles & quelquefois purement algébriques. En effet ſi on ſuppoſe $\frac{s\,dx}{t} = \frac{\sigma\,dy}{\theta}$, équation dont chaque membre eſt une différentielle ſemblable à celle dont on vient d'enſeigner à trouver l'intégrale, mais dont le premier ne contient que la changeante x, & le ſecond la changeante y, on peut en trouvant l'intégrale de chaque membre par la méthode précédente, réduire cette équation en une autre purement logarithmique. En effet, ſoit pris X & Y pour ce que les quotiens qui réſultent de la diviſion de s par t, & de σ par θ, ont d'abſolument intégrable, c'eſt-à-dire pour les intégrales de ce que ces quotiens ont d'abſolu & ſans fraction, on aura en ſuivant ce qui eſt dit ci-deſſus, $X + l\overline{x+f}^{a} \times \overline{x+g}^{b} \times \overline{x+h}^{e} = Y + l\overline{y+\varphi}^{\alpha} \times \overline{y+\gamma}^{\epsilon} \times \overline{y+\lambda}^{\varkappa}$ &c. Si on prend à préſent l'unité par laquelle on conçoit que X & Y ſont multipliés, pour un logarithme conſtant $= ln$, la réduction des logarithmes aux puiſſances donnera (Art. 29 & 30 Introduction) cette équation exponentielle $n^{X} \times \overline{x+f}^{a} \times \overline{x+g}^{b} \times \overline{x+h}^{c} = n^{Y} \times \overline{y+\varphi}^{\alpha} \times \overline{y+\gamma}^{\epsilon} \times \overline{y+\lambda}^{\varkappa}$ qui eſt l'équation exponentielle à laquelle ſe réduit la propoſée. Or cette équation peut quelquefois devenir purement algébrique,

algébrique, par exemple, lorſque X & Y ſont nuls, & que a, b, c, auſſi-bien que α, ε, $\varkappa$ ſont commenſurables.

CXXVI.

Voilà la méthode telle que nous l'a donné M. Bernoulli. A examiner cette méthode en elle-même, on voit qu'elle n'apprend à intégrer les fractions rationelles qu'en les réduiſant à des logarithmes réels ou imaginaires. Or il eſt évident qu'il doit y avoir une infinité de fractions rationelles différentielles qui ſont intégrables abſolument, d'autres qui ſont en partie intégrables abſolument, & en partie intégrables par logarithmes. En effet, prenez une fraction rationelle finie telle que $\frac{1}{x+a}$, ſa différentielle $\frac{-dx}{(x+a)^2}$ eſt intégrable abſolument. De même ſoit priſe la différence de $\frac{1}{x+a} + l(x+b)$, on aura $\frac{xxdx + 2axdx - xdx - bdx + aadx}{(x+a)^2 \times (x+b)}$, différentielle en partie intégrable abſolument & en partie intégrable par logarithmes.

Examen de la méthode de M. Bernoulli.

Défauts de cette méthode.

D'où l'on voit en général qu'il peut y avoir pluſieurs cas qui ne ſauroient être réſolus par la méthode de M. Bernoulli, au moins ſi on l'employe de la façon que cet illuſtre Géometre l'a preſcrit. Pour mieux nous en convaincre, & ſuppléer en même temps à ce qui lui manque, faiſons la remarque ſuivante.

CXXVII.

Trois cas à diſtinguer dans l'intégration des fractions rationelles.

REMARQUE. Il faut diſtinguer trois cas dans l'intégration de toute fraction rationelle. Car le dénominateur de la

fraction rationelle peut avoir ſes racines toutes réelles ou toutes imaginaires, ou en partie réelles & en partie imaginaires. Examinons ces trois cas ſéparément.

CXXVIII.

Premier cas où le dénominateur a ſes racines toutes réelles.

Dans le premier cas, lorſque le dénominateur a ſes racines toutes réelles, elles peuvent être toutes égales, ou toutes inégales, ou en partie égales & en partie inégales.

1°. Racines réelles égales.

1°. Lorſqu'elles ſont toutes égales, par exemple, quand on a $\frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{dx}{(x+a)\cdot(x+a)}$, ſuivant la méthode précédente, on fera $\frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{mdx}{x+a} + \frac{ndx}{x+a}$; en réduiſant les deux membres de cette équation au même dénominateur, on a $\frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{(m+n)xdx}{(x+a)^2} + (m+n) \times \frac{adx}{(x+a)^2}$. Donc en comparant les termes correſpondans, $m+n=0$ & $ma+na=1$, ce qui ſe contredit.

Inconvénient de la méthode de M. Bernoulli dans ce cas.

On trouveroit la même contradiction ſi on repréſentoit les racines égales par x^m, ou par $(x+a)^m$. Il eſt donc évident que la méthode de M. Bernoulli ne peut ſervir, lorſque les racines du numérateur ſont toutes réelles & égales. Il eſt aiſé d'en ſubſtituer une autre.

CXXIX.

Car de ce que nous avons dit (Art. VII.) il ſuit que lorſque le dénominateur de la fraction eſt ſimplement x^m, la fraction a une intégrale exacte, & de même lorſque ce dénominateur eſt $(x+a)^m$, on en trouve aiſément l'intégration exacte par notre premiere transformation; à

moins que dans l'un & l'autre cas la plus haute puiſſance de x dans le numérateur ne fût $m-1$: car alors il y auroit une partie de la fraction intégrable par logarithmes. Quelquefois même la fraction entiere ſeroit intégrable par logarithmes, comme $\frac{xxdx+2axdx+aadx}{(x+a)^3}$ qui ſe réduit à cette différentielle logarithmique $\frac{dx}{x+a}$.

CXXX.

2°. Lorſque les racines du dénominateur ſont toutes réelles inégales, qui nous aſſurera que la méthode précédente ne donne pas la même contradiction que ci-deſſus? Il faut donc avoir recours à une autre méthode pour ne pas marcher en tâtonnant.

2°. Racines réelles inégales.

CXXXI.

3°. Soit propoſé d'intégrer $\frac{dx}{x^2.(x+a)}$: ſuivant la méthode de M. Bernoulli on ſuppoſera $\frac{dx}{x^2.(x+a)}=\frac{fdx}{x}+\frac{gdx}{xx}+\frac{hdx}{x+a}$, ce qui donnera en comparant enſemble les deux membres de cette équation :

$$\left.\begin{matrix} fxx+fax \\ +gxx+gax \\ +hxx \end{matrix}\right\}=1. \text{ Donc } \left\{\begin{matrix} fxx+fax \\ +gxx+gax \\ +hxx \end{matrix}\right\}-1=0;$$

d'où l'on tire 1°. $fxx+gxx+hxx=0$, c'eſt-à-dire $f+g+h=0$; 2°. $fax+gax=0$, c'eſt-à-dire $f+g=0$; 3°. $-1=0$, ce qui eſt abſurde. On trouvera la même difficulté ſi on veut intégrer par la méthode de M. Bernoulli $\frac{dx}{(x+a)^2\times(x+b)}$. Voilà donc le même

3°. Racines réelles en partie égales & en partie inégales.

La méthode de M. Bernoulli eſt encore défectueuſe dans ce cas.

inconvénient que dans le cas des racines réelles toutes égales.

CXXXII.

Nous allons faire voir d'abord que dans le cas des racines réelles toutes inégales, il eſt toujours poſſible de trouver chaque coefficient ; nous ferons voir enſuite ce qu'il faut faire dans le cas des racines réelles, en partie égales, & en partie inégales, & enfin nous donnerons la méthode pour trouver les coefficiens des numérateurs dans tous les cas.

CXXXIII.

Expoſition d'une autre méthode pour le cas des racines réelles inégales.

PROBLEME 2. Intégrer une fraction rationelle différentielle dont le dénominateur a toutes ſes racines réelles inégales.

SOLUTION. Soit $\frac{px^{m-n}dx \ldots\ldots\ldots + qdx}{(x+a).(x+b).(x+c).(x+e)\ \&c.\ (m)}$ la fraction dont on cherche l'intégrale. (La quantité m miſe ici & ailleurs entre deux parentheſes, au bout du dénominateur, marque l'expoſant de la dimenſion du dénominateur ou le nombre de ſes racines). En ſuppoſant $x+a=y$, on a $x=y-a$: mettant à la place de x ſa valeur, on aura la transformée ſuivante, $\frac{(py^{m-n} \ldots\ldots\ldots + g)dy}{y.(y-a+b).(y-a+c).(y-a+e)\ \&c.\ (m)}$ dans laquelle on remarquera qu'aucun des diviſeurs du dénominateur, excepté le premier, ne peut ſe réduire à y, puiſque par l'hypotheſe $a, b, c, e,$ ſont des quantités différentes. Je remarque maintenant que la transformée

$$\frac{(py^{m-n} \ldots\ldots\ldots + g)\,dy}{y\cdot(y-a+b)\cdot(y-a+c)\cdot(y-a+e)\ \&c.\ (m)} =$$

$$\frac{(py^{m-n-1} \ldots\ldots + Q)\,dy}{(y-a+b\cdot(y-a+c)\cdot(y-a+e)\ \&c.\ (m-1)} +$$

$$\frac{g\,dy}{y\cdot(y-a+b)\cdot(y-a+c)\cdot(y-a+e)\ \&c.\ (m)}.$$

Le premier membre de cette quantité a déja, comme on voit, un facteur de moins à ſon dénominateur. Pour mettre le ſecond membre dans le même cas je fais $\frac{1}{y} = u$, & ce ſecond membre devient

$$\frac{-g\,du}{uu\cdot\frac{1}{u}\left\{\frac{1-au+bu}{u}\right\}\cdot\left\{\frac{1-au+cu}{u}\right\}\cdot\left\{\frac{1-au+eu}{u}\right\}\ (m)}$$

$$= \frac{\frac{-g\,u^{m-2}\,du}{(b-a)\cdot(c-a)\cdot(e-a)\ \&c.}}{\left\{\frac{1}{b-a}+u\right\}\cdot\left\{\frac{1}{c-a}+u\right\}\cdot\left\{\frac{1}{e-a}+u\right\}\ \&c.\ (m-1)}.$$

CXXXIV.

Il eſt donc évident que par cette méthode on transforme la différentielle donnée en deux autres dont le dénominateur de chacune a un expoſant moindre d'une unité que celui de la fraction propoſée, & qu'ainſi pour intégrer une fraction rationelle quelconque dont les facteurs du dénominateur ſont des quantités réelles & inégales, il ne faut que ſavoir intégrer la fraction précédente; c'eſt-à-dire celle dont le dénominateur a une dimenſion & par conſéquent un facteur de moins; allant toujours ainſi en remontant de fraction en fraction, il eſt viſible qu'on réduira l'intégration d'une fraction rationelle quelconque dont le dénominateur

a ſes racines réelles & inégales, à celle de la fraction ſimple $\frac{ndx}{x+a}$. Donc puiſque cette différentielle eſt une différentielle logarithmique, il s'enſuit que toute fraction rationelle dont le dénominateur n'a que des racines réelles & inégales peut toujours être intégrée par logarithmes.

CXXXV.

COROLLAIRE. Par la méthode que nous venons d'expoſer dans le Problême précédent, il eſt clair que l'intégration de $\frac{ndx}{x+a}$ donne très-promptement celle de $\frac{fxdx+gdx}{(x+a).(x+b)}$: celle-ci donne de même celle de $\frac{fx^2dx+gxdx+hdx}{(x+a).(x+b).(x+c)}$. Il eſt donc facile de former par ce moyen une table pour l'intégration de toutes les fractions rationelles dont le dénominateur a ſes racines réelles & inégales.

Pour intégrer une fraction rationelle particuliere la méthode de M. Bernoulli paroîtra plus courte, mais celle que nous expoſons ici a deux uſages : 1°. elle donne très-promptement une table qui dans le beſoin ſeroit très-commode ; 2°. on peut, ce ſemble, par ſon moyen démontrer très-clairement la méthode de M. Bernoulli.

Effectivement nous avons déja vu que toutes les fractions rationelles dont le dénominateur a ſes racines réelles & inégales ſont intégrables par logarithmes ; mais il reſte à prouver que ces fractions peuvent être réduites en autant de différentielles logarithmiques que leur dénominateur a de facteurs différens. C'eſt ce que M. Bernoulli s'eſt

contenté de ſuppoſer ſans le prouver, & la preuve néanmoins en paroît d'autant plus néceſſaire, qu'on a vu des exemples auxquels la méthode de cet illuſtre Géometre ne doit être appliquée qu'avec précaution.

CXXXVI.

Démonſtration de la méthode de M. Bernoulli.

Pour faire cette démonſtration nous nous contenterons d'un exemple. Soit $\frac{fxdx+gdx}{(x+a)\cdot(x+b)}$ la quantité à intégrer: faiſant par la méthode du Problême précédent $x+a=z$, elle ſe réduit à $\frac{fdz}{z-a+b}$ $\frac{(-fa+g)dz}{z\cdot(z-a+b)}$ dont on voit que le premier membre a déja un facteur de moins. J'opere ſur le ſecond, je fais $\frac{aa}{z}=u$, donc $z=\frac{aa}{u}$, & $dz=-\frac{aadu}{uu}$. Subſtituant pour z & dz ces valeurs en u & du, le ſecond membre devient $\frac{(fa-g)\cdot\frac{aadu}{uu}}{\frac{aa}{u}\cdot\left\{\frac{aa}{u}-a+b\right\}}=\frac{(fa-g)\frac{aadu}{uu}}{\frac{a^4}{uu}-\frac{a^3+aab}{u}}$, & en diviſant haut & bas par aa, $=\frac{(fa-g)\frac{du}{uu}}{\frac{aa}{uu}-\frac{a+b}{u}}=$, en multipliant haut & bas par uu, $\frac{(fa-g)du}{aa+(b-a)u}$, & enfin en diviſant le numérateur & le dénominateur par $b-a$, cette différentielle ſe réduit à $\frac{\frac{(fa-g)du}{b-a}}{\frac{aa}{b-a}+u}$, laquelle quantité a, comme on voit, un facteur de moins que plus haut. La fraction entiere réduite eſt donc $\frac{fdz}{z-a+b}+\frac{\frac{(fa-g)du}{b-a}}{\frac{aa}{b-a}+u}$ dont l'intégrale eſt $f\,l(z-$

$a+b) + \frac{fa-g}{b-a} l\left\{\frac{aa}{b-a}+u\right\} = \left\{$ en mettant pour z & pour u leurs valeurs $x+a$ & $\frac{aa}{x+a}\right\} f\, l(x+b) + \frac{fa-g}{b-a} l(x+b) \times \frac{aa}{(x+a).(b-a)}$. Or la différence de cette intégrale eſt $\frac{(f+fa-g)}{b-a} \cdot \frac{dx}{x+b} - \frac{fa+g}{b-a} \times \frac{dx}{x+a}$. Donc la différentielle $\frac{fx\,dx+g\,dx}{(x+a).\ x+b)}$ peut être repréſentée par $\frac{p\,dx}{x+a} + \frac{q\,dx}{x+b}$. Il eſt évident par la nature de notre méthode, que la démonſtration que nous venons de donner pour la différentielle ſimple $\frac{fx\,dx+g\,dx}{(x+a).(x+b)}$ s'appliquera aiſément à toutes les autres différentielles plus compoſées. Donc &c.

CXXXVII.

Application de notre derniere méthode au cas des racines réelles en partie égales & en partie inégales.

A préſent je paſſe au cas où les racines du dénominateur étant toutes réelles, ſont en partie égales & en partie inégales.

Ce cas peut être repréſenté par $\frac{dx}{x^m.(x+a).(x+b)\ \&c.}$, ou $\frac{dx}{(x+a)^m.(x+b).(x+c)\ \&c.}$, car cette derniere différentielle ſe réduit à la premiere par la ſimple transformation de $x+a$ en z.

CXXXVIII.

PROBLEME 3. Intégrer une fraction rationelle différentielle comme $\frac{(Ax^p.....+Q)\,dx}{x^m.(x+a).(x+b)\ \&c.}$ ou $\frac{(Ax^p.....+Q)\,dx}{(x+a)^m.(x+b).(x+c)\ \&c.}$ dont le dénominateur a ſes racines réelles en partie égales & en partie inégales.

SOLUTION. Si la propoſée eſt $\frac{(Ax^p.....+Q).dx}{(x+a)^m.(x+b).(x+c)\ \&c.}$

on

on la ramene au ſimple cas de $\frac{(Ax^p \ldots\ldots + Q)\,dx}{x^m \cdot (x+a) \cdot (x+b)\ \&c.}$ par la ſeule transformation de $x+a$ en z, deſorte que toute la difficulté ſe réduit à trouver l'intégrale de cette derniere quantité.

Pour y parvenir on diviſera le numérateur par x^m tant qu'il ſera poſſible de le faire, c'eſt-à-dire juſqu'à ce qu'on arrive à un reſte où l'expoſant de x ſoit plus petit que m, & la propoſée deviendra par conſéquent égale à

$$\frac{(Ax^{p-m} \ldots\ldots + K)\,dx}{(x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+c)\ \&c.\ (n)} + \frac{(Hx^{m-1} \ldots\ldots\ldots + Q)\,dx}{x^m \cdot (x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+c)\ \&c.\ (m+n)},$$

ou en général à cauſe que H peut être $= 0$,

$$\frac{(Ax^{p-m} \ldots\ldots + K)\,dx}{(x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+c)\ \&c.\ (n)} + \frac{(Lx^r \ldots\ldots\ldots\ldots + S)\,dx}{x^m \cdot (x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+c)\ \&c.\ (m+n)}$$

où l'on obſervera que $r < m$. Soit maintenant $\frac{1}{x} = u$, on aura $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{uu}$: ſubſtituons ces valeurs de x & de dx dans le ſecond membre : (car le premier dans lequel les racines ſont toutes inégales, s'intégre aiſément par les articles précédens :) ce ſecond membre deviendra $\frac{(Su^r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + L) - du}{uu \cdot u^r \cdot \frac{1}{u^m} \times \frac{(1+au)\cdot(1+bu)\cdot(1+cu)\ \&c.}{u^n}} =$

$\frac{(-Su^r \ldots\ldots\ldots\ldots - L)\,u^{m+n}\,du}{u^{r+2}\cdot(1+au)\cdot(1+bu)\cdot(1+cu)\ \&c.\ (n)}$; or à cauſe que (hyp.) $m > r$ & que n eſt au moins $= 1$, il s'enſuit que u^{m+n} ſe diviſe par u^{r+2} & que la quantité entiere ſe réduit à $\frac{(-Su^{m+n-2} \ldots - I.u^{m+n-r-2})\,du}{(1+bu)\cdot(1+cu)\cdot(1+au)\ \&c.\ (n)}$ où la plus haute dimenſion du dénominateur eſt n, & $m+n-2$ celle du numérateur. Or $m+n-2$ eſt au moins $= n$, puiſque m eſt au moins $= 2$: donc le numérateur

peut ſe diviſer par le dénominateur, ce qui produira un quotient intégrable. Donc la propoſée peut être intégrée en partie.

CXXXIX.

COROLLAIRE 1. Il eſt évident qu'il y a autant de termes dans le quotient qu'il y a d'unités dans $(m+n-2) - (n) + 1 = m - 1$; deſorte que la différentielle donnée peut être repréſentée dans ſon entier par $\frac{(Ax^{p-m} \ldots\ldots + K)\,dx}{(x+a).(x+b).(x+c)\,\&c.\,(n)} + Fu^{m-2}\,du. + \ldots\ldots + Gdu + \frac{(Mu^{m-1} \ldots\ldots + P)\,du}{(1+au).(1+bu).(1+cu)\,\&c.}$, ou en mettant pour u ſa valeur $\frac{1}{x}$, $\frac{(Ax^{p-m} \ldots\ldots + K)\,dx}{(x+a).(x+b).(x+c)\,\&c.\,(n)} - \frac{Fdx}{x^m} - \frac{Qdx}{x^{m-1}} \ldots\ldots - \frac{Gdx}{xx} + \frac{Sdu}{1+au} + \frac{Rdu}{1+bu}$ &c. $= \frac{Bdx}{x+a} + \frac{Cdx}{x+b} + \frac{Ddx}{x+c}$ &c. $- \frac{Fdx}{x^m} \ldots\ldots - \frac{Gdx}{xx} - \frac{Sdx}{x.(x+a)} - \frac{Rdx}{x.(x+b)}$ &c. & à cauſe que $\frac{Sdx}{x.(x+a)} + \frac{Rdx}{x.(x+b)} =$ (Art. CXXXV.) $\frac{Odx}{x} + \frac{Vdx}{x+b}$ &c. il s'enſuit que la différentielle propoſée peut être repréſentée par $- \frac{Odx}{x} - \frac{Gdx}{xx} \ldots\ldots - \frac{Fdx}{x^m} \ldots\ldots + \frac{Edx}{x+a} + \frac{Ldx}{x+b} + \frac{Ndx}{x+c}$ &c. ou plus ſimplement enfin par $\frac{(-Ox^{m-1} - Gx^{m-2} \ldots\ldots - F)\,dx}{x^m} + \frac{Edx}{x+a} + \frac{Ldx}{x+b} + \frac{Ndx}{x+c}$ &c.

CXL.

COROLLAIRE 2. Donc ſi on veut intégrer la fraction $\frac{dx}{x^2.(x+a)}$ par notre derniere méthode, on ſuppoſera $\frac{1}{x}$

$= u$, & elle ſe changera en $\frac{-udu}{1+au} = -\frac{\frac{udu}{a}}{\frac{1}{a}+u} =$

$-\frac{\frac{udu}{a}}{\frac{1}{a}+u} - \frac{\frac{1}{aa}du}{\frac{1}{a}+u} + \frac{\frac{1}{aa}du}{\frac{1}{a}+u} = -\frac{du}{a} \times \left\{\frac{u+\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+u}\right\}$

$+\frac{\frac{1}{aa}du}{\frac{1}{a}+u} = -\frac{du}{a} + \frac{\frac{1}{aa}du}{\frac{1}{a}+u}$ dont l'intégrale eſt $-\frac{u}{a}$

$+\int \frac{\frac{1}{aa}du}{\frac{1}{a}+u} = -\frac{u}{a} + \frac{1}{aa}\, l\left\{\frac{1}{a}+u\right\}$. Mais ſi on veut ſe ſervir de la méthode de M. Bernoulli, il faudra ſuppoſer $\frac{dx}{x^2.(x+a)} = \frac{Adx}{x+a} + \frac{Bxdx+Cdx}{xx}$; on déterminera les coefficiens de la maniere que nous enſeignerons bien-tôt; enſuite on intégrera.

CXLI.

COROLLAIRE 3. Il ſuit de ce qui a été dit dans le Problême & dans ſes Corollaires, que la fraction eſt en partie intégrable abſolument & en partie intégrable par logarithmes, lorſque le dénominateur a ſes racines en partie égales & en partie inégales. Ceci peut ſervir d'éclairciſſement à un endroit du Traité de la quadrature des Courbes de M. Newton, où ce grand Géometre s'exprime ainſi : *Si ordinata eſt fractio rationalis irreducibilis cum denominatore ex duobus vel pluribus terminis compoſito, reſolvendus eſt denominator in diviſores ſuos omnes primos; & ſi diviſor ſit* aliquis cui nullus alius eſt æqualis, *curva quadrari nequit.*

Explication d'un paſſage de Newton.

En effet nous venons de voir que quand les racines ſont en partie égales & en partie inégales, ou quand elles ſont toutes inégales, l'intégration dépend des logarithmes ou de la quadrature de l'hyperbole, & que par conſéquent ſi la différentielle propoſée repréſente l'élément de l'aire d'une courbe, cette courbe ne ſera point quarrable abſolument.

CXLII.

COROLLAIRE 4. Si la propoſée eſt $\frac{(Ax^p \ldots + K)\,dx}{(x+a)^m \cdot (x+b)^n \cdot (x+c) \cdot (x+e)\ \&c.}$, on pourra prendre $\frac{(Fx^{m-1} \ldots + G)\,dx}{(x+a)^m} + \frac{(Qx^{n-1} \ldots + P)\,dx}{(x+b)^n} + \frac{R\,dx}{x+c} + \frac{S\,dx}{x+e} + \&c.$ ou $\frac{(Bx^{m+n-1} \ldots + D)\,dx}{(x+a)^m \cdot (x+b)^n} + \frac{R\,dx}{x+c} + \frac{S\,dx}{x+e}\ \&c.$ pour la différentielle qui doit repréſenter la propoſée. On déterminera les coefficiens par la méthode de l'article CL. que nous donnerons plus bas. Voyons à préſent ce qu'il faut faire pour trouver dans chaque cas la valeur des coefficiens du numérateur. Nous ſuppoſerons dans le Problême ſuivant ſur la détermination des coefficiens du numérateur, la fraction débarraſſée de dx, il eſt aiſé de la remettre après l'opération.

CXLIII.

Expoſition de la méthode de M. Cotes pour déterminer les coefficiens du numérateur des fractions rationelles.

PROBLEME 4. Déterminer les coefficiens des numérateurs des fractions ſimples dans leſquelles ſe décompoſe une fraction rationelle dans le cas où les racines du dénominateur ſont toutes réelles & inégales.

SOLUTION. Soit cette fraction rationelle repréſentée par $\frac{x^\theta}{L+Mx+Nx^2+Px^3.....+Ux^\lambda}$ l'expoſant θ eſt ſuppoſé moindre que λ, & L, M, N &c. ſont des quantités données. 1°. Lorſque les racines du dénominateur ſont réelles & toutes inégales.

Je ſuppoſe $L+Mx+Nxx+Px^3.....+Ux^\lambda=0$: je cherche les racines de cette équation qui dans le cas précédent ſont inégales. Soient ces racines repréſentées par $e+fx=0$, $g+hx=0$, $k+lx=0$ &c. on aura donc $L+Mx+Nx^2+Px^3.....+Ux^\lambda=\overline{e+fx}.\overline{g+hx}.\overline{k+lx}$ &c. Je ſuppoſe enſuite $\frac{x^\theta}{\overline{e+fx}.\overline{g+hx}.\overline{k+lx}\ \&c.}=\frac{A}{e+fx}+\frac{B}{g+hx}+\frac{C}{k+lx}+\&c.$ ce qui donnera, comme tout le monde ſait, $x^\theta=A\times\overline{g+hx}\times\overline{k+lx}+B\times\overline{e+fx}\times\overline{k+lx}+C\times\overline{e+fx}\times\overline{g+hx}+\&c.$ Pour abréger ſoit $\overline{g+hx}\times\overline{k+lx}=Q$; $\overline{e+fx}\times\overline{k+lx}=R$; $\overline{e+fx}\times\overline{g+hx}=S$, & $L+Mx+Nx^2+Px^3.....+Ux^\lambda=K$; on aura $x^\theta=AQ+BR+CS+\&c.$ mais la ſuppoſition de $e+fx=0$, donne $x=-\frac{e}{f}$; $x^\theta=-\frac{e^\theta}{f^\theta}$; & $R=0$; $S=0$; d'où l'on tire dans ce cas $-\frac{e^\theta}{f^\theta}=AQ$ & $A=\frac{-\frac{e^\theta}{f^\theta}}{Q}$. Mais $\overline{e+fx}\times Q=K$; prenant les différences de part & d'autre, K & Q étant variables, on a $fdx\times Q+dQ\times\overline{e+fx}=dK$: ou plutôt parce que $e+fx=0$, on a $fdx\times Q=dK$, & ainſi $Q=\frac{dK}{fdx}$. Prenons à préſent la différence de $L+Mx+$

$Nx^2 + Px^3 \ldots + Ux^\lambda$, & mettons pour x ſa valeur $-\frac{e}{f}$, nous aurons $Q = \frac{M - 2N \times \frac{e}{f} + 3P \times \frac{ee}{ff} \ldots - \lambda U \times \frac{e^{\lambda-1}}{f^{\lambda-1}}}{f}$.

Donc en mettant cette valeur dans l'équation $A = -\frac{e^\theta}{f^\theta}$, on aura $A = \frac{-\frac{e^\theta}{f^\theta} \times f}{M - 2N \times \frac{e}{f} + 3P \times \frac{ee}{ff} \ldots\ldots - \lambda U \times \frac{e^{\lambda-1}}{f^{\lambda-1}}}$.

Pareillement ſi on ſuppoſe $g + hx = 0$, on aura $x = -\frac{g}{h}$; $x^\theta = -\frac{g^\theta}{h^\theta}$ & $Q = 0$ & $S = 0$: par conſéquent $-\frac{g^\theta}{h^\theta} = BR$; & $B = \frac{-\frac{g^\theta}{h^\theta}}{R}$. Mais puiſque $K = \overline{g+hx} \times R$, on aura $dK = h\,dx \times R + dR \times \overline{g+hx}$; & dans ce cas $dK = h\,dx \times R$; ce qui donne $R = \frac{dK}{h\,dx}$, d'où l'on tire $R = \frac{M - 2N \times \frac{g}{h} + 3P \times \frac{gg}{hh} \ldots\ldots - \lambda U \times \frac{g^{\lambda-1}}{h^{\lambda-1}}}{h}$

& par conſéquent à cauſe que $B = \frac{-\frac{g^\theta}{h^\theta}}{R}$ on aura $B = \frac{-\frac{g^\theta}{h^\theta} \times h}{M - 2N \times \frac{g}{h} + 3P \times \frac{gg}{hh} \ldots\ldots - \lambda U \times \frac{g^{\lambda-1}}{h^{\lambda-1}}}$.

L'on trouvera de la même maniere $C = \frac{-\frac{k^\theta}{l^\theta} \times l}{M - 2N \times \frac{k}{l} + 3P \times \frac{kk}{ll} \ldots\ldots - \lambda U \times \frac{k^{\lambda-1}}{l^{\lambda-1}}}$, & ainſi

des autres. Mettant donc ces valeurs de A, B, C &c. dans les numérateurs des fractions, les coefficiens en ſont déterminés. *C. Q. F. T.*

CXLIV.

COROLLAIRE. Il eſt donc clair que puiſque les valeurs de A, B, C, &c. ſont toutes ſemblables, on peut avoir une regle générale pour déterminer les coefficiens indéterminés des numérateurs des fractions dans leſquelles ſe réſout, ſuivant la méthode de M. Bernoulli, une fraction rationelle qui a ſes racines réelles & inégales. Car on voit que la valeur d'une de ces indéterminées quelconques, de B par exemple, eſt une fraction dont le numérateur eſt égal à x^{θ}. multipliée par la fonction de x qui eſt dans le dénominateur de B; & dont le dénominateur eſt égal à la différence du dénominateur de la fraction propoſée diviſée par dx, en mettant dans ce numérateur & ce dénominateur de la valeur de B, la valeur de x tirée de l'équation reſpective du dénominateur de B, égal à zéro. On doit obſerver que les numérateurs des valeurs de A, B, C, &c. ont le ſigne $+$, lorſque θ eſt un nombre pair en y comprenant le zéro; ils ont auſſi ce même ſigne, lorſque les valeurs de x ſont poſitives, par exemple ſi les diviſeurs du dénominateur de la propoſée étoient $e - fx$, $g - hx$ &c. car les valeurs de x ſeroient dans ce cas, comme on le voit aiſément, $+\frac{e}{f}$, $+\frac{g}{h}$ &c. Auſſi dans ce même cas le dénominateur de la propoſée auroit cette forme

$L - Mx + Nx^2 - Px^3 +$ &c. puiſque toutes ſes racines étant poſitives, les termes doivent avoir ſucceſſivement les ſignes $+$ & $-$ ſuivant les principes de la formation des équations, connus par tous les Algébriſtes.

CXLV.

Application de cette méthode à quelques exemples.

Premier exemple.

Cette méthode ſe développera encore davantage en l'appliquant à quelques exemples. Soit la fraction $\frac{dx}{e+fx \times g+hx}$, changée ſuivant la méthode de M. Bernoulli en ces deux autres $\frac{Adx}{e+fx} + \frac{Bdx}{g+hx}$; il s'agit de déterminer la valeur de A & de B. Je ſuppoſe d'abord qu'on ait $\frac{1}{(e+fx).(g+hx)} = \frac{A}{e+fx} + \frac{B}{g+hx}$, dans ce cas on a $x^0 = 1$, donc $\theta = 0$, & ſuppoſant $e+fx = 0$ on en tire $x = -\frac{e}{f}$; donc par la regle donnée dans le précédent Corollaire, le numérateur de la fraction égale à A eſt $-\frac{e^\theta}{f^\theta} \times f = f$, à cauſe que $\theta = 0$; & le dénominateur eſt égal à la différence de $(e+fx) \times (g+hx)$; cette différence eſt $fg\,dx + fhx\,dx + eh\,dx + fhx\,dx$; laquelle à cauſe de $e+fx = 0$, ſe réduit à $fg\,dx + fhx\,dx$. Je diviſe par dx, & je mets pour x ſa valeur $-\frac{e}{f}$. Cette différence devient $= fg - eh$. Donc on aura $A = \frac{f}{fg-eh}$.

De la même maniere en ſuppoſant $g+hx = 0$, on trouvera $B = \frac{h}{eh-fg}$. Donc $\frac{1}{(e+fx).(g+hx)} = \frac{f}{fg-eh} \times \frac{1}{e+fx} - \frac{h}{fg-eh} \times \frac{1}{g+hx}$; donc $\frac{dx}{(e+fx).(g+hx)} = \frac{fdx}{e+fx}$

$\frac{1}{fg-eh} - \frac{h\,dx}{g+hx} \times \frac{1}{fg-eh}$, qu'on voit évidemment être deux différentielles logarithmiques. Pour être mieux convaincu de la bonté de la méthode, voyons si ces deux différentielles sont identiques avec la fraction proposée $\frac{dx}{(e+fx).(g+hx)}$. Ces deux différentielles sont $\frac{f\,dx}{(fg-eh).(e+fx)} - \frac{h\,dx}{(fg-eh).(g+hx)}$. Je les réduis au même dénominateur, j'ai $\frac{fg\,dx+fhx\,dx-eh\,dx-fhx\,dx}{(fg-eh).(e+fx).(g+hx)} = \frac{(fg-eh).dx}{(fg-eh).(e+fx).(g+hx)} = \frac{dx}{(e+fx).(g+hx)}$.

CXLVI.

Second exemple.

Si l'on avoit à intégrer $\frac{xx\,dx}{ax^3-bx^2+cx-\delta}$, en supposant que les diviseurs du dénominateur soient $ex-f$, $gx-h$, $ix-l$, & que par conséquent $\frac{xx\,dx}{ax^3-bx^2+cx-\delta} = \frac{A\,dx}{ex-f} + \frac{B\,dx}{gx-h} + \frac{C\,dx}{ix-l}$; on trouvera $\theta = 2$, & la supposition de $ex-f=0$ donnera $x=\frac{f}{e}$. Continuant l'opération comme dans l'exemple précédent, on aura la valeur de A. En supposant ensuite successivement $gx-h=0$, & $ix-l=0$, on trouvera les valeurs de B & de C: substituant ces valeurs dans les fractions simples énoncées ci-dessus, elles deviendront $\frac{ff}{3aff+2bef+cee} \times \frac{e\,dx}{ex-f} + \frac{hh}{3ahh+2bgh+cgg} \times \frac{g\,dx}{gx-h} + \frac{ll}{3all+2bil+cii} \times \frac{i\,dx}{ix-l}$ qui sont trois différentielles logarithmiques.

CXLVII.

Troisieme exemple.

Enfin si la fraction rationelle avoit cette forme $\frac{a+bx+cx^2+\delta x^3+\&c.}{1+Mx+Nx^2+Px^3\ldots+Ux^\lambda}$, ($\lambda$ est plus grand que

l'expoſant de x dans le numérateur), la méthode qu'on a donnée dans le Problême précédent ſerviroit encore pour réſoudre cette fraction en pluſieurs fractions ſimples $\frac{A}{e+fx} + \frac{B}{g+hx} + \frac{C}{k+lx}$ + &c. (λ). Car ſuppoſant $L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^\lambda = (e+fx).(g+hx).(k+lx)$ &c. $= K$, donnant ici les mêmes valeurs que dans le Problême 4. à Q, R, S, on aura $a + bx + cx^2 + \delta x^3$ + &c. $= AQ + BR + CS$ + &c. & lorſque $e + fx = 0$, ou $x = -\frac{e}{f}$, on a $a - b \times \frac{e}{f} + c \times \frac{ee}{ff} - \delta \times \frac{e^3}{f^3}$ + &c. $= AQ$; & puiſque $Q = \frac{dK}{fdx} = \ldots$ $\frac{M - 2N \times \frac{e}{f} + 3P \times \frac{ee}{ff} \ldots\ldots - \lambda U \times \frac{e^{\lambda-1}}{f^{\lambda-1}}}{f}$ on aura $A = \frac{a - b \times \frac{1}{f} + c \times \frac{e^2}{f^2} - \delta \times \frac{e^3}{f^3} + \text{&c.}}{Q} = \frac{(a - b \times \frac{e}{f} + c \times \frac{ee}{ff} - \delta \times \frac{e^3}{f^3} + \text{&c.}) \times f}{M - 2N \times \frac{e}{f} + 3P \times \frac{ee}{ff} \ldots - \lambda U \times \frac{e^{\lambda-1}}{f^{\lambda-1}}}$.

De la même maniere en ſuppoſant $g + hx = 0$, on trouvera la valeur de B, & celle de C en ſuppoſant $k + lx = 0$; d'où l'on conclura que les valeurs de A, B, C, dans ce cas ſont ſemblables à celles qu'on a trouvées dans le cas du Problême 4. La différence n'eſt que dans les numérateurs qui changent ſuivant les numérateurs des fractions propoſées.

CXLVIII.

2°. Lorſque les racines du dénominateur ſont en partie égales & en partie inégales.

PROBLEME 5. Déterminer les coefficiens du numérateur des fractions ſimples dans leſquelles ſe réſout une fraction rationelle différentielle en ſuppoſant les racines

du dénominateur en partie égales & en partie inégales.

SOLUTION. Soit cette fraction repréſentée par la ſuivante $\frac{x^\theta}{(e+fx)^\delta.(g+hx)^\lambda.(k+lx)^\mu \text{ &c.}}$, (la ſomme des quantités $\delta+\lambda+\mu+$ &c. eſt cenſée plus grande que l'expoſant θ). Suppoſons cette fraction égale à $\frac{A+Bx+Cx^2 \ldots +Fx^{\delta-1}}{(e+fx)^\delta} + \frac{G+Hx+Ix^2 \ldots +Mx^{\lambda-1}}{(g+hx)^\lambda} + \frac{N+Px+Qx^2 \ldots +Tx^{\mu-1}}{(k+lx)^\mu} +$ &c. cette ſuppoſition donnera $x^\theta = (A+Bx+Cx^2 \ldots +Fx^{\delta-1}) \times (g+hx)^\lambda \times (k+lx)^\mu + (G+Hx+Ix^2 \ldots +Mx^{\lambda-1}) \times (e+fx)^\delta \times (k+lx)^\mu + (N+Px+Qx^2 \ldots +Tx^{\mu-1}) \times (e+fx)^\delta \times (g+hx)^\lambda$ &c. On égalera à zéro la ſomme de tous les termes qui ſont multipliés par la grandeur x élevée à une autre puiſſance que θ, & on égalera à x^θ la ſomme des autres termes qui ſont multipliés par x^θ. De cette maniere on aura autant d'équations qu'il y a de quantités indéterminées A, B, C &c. dont on trouvera les valeurs par le moyen de ces équations.

Cette derniere méthode n'eſt autre choſe que celle de M. Bernoulli appliquée à ce cas particulier, avec les précautions que nous avons indiquées ci-deſſus, & qui empêchent cette méthode d'être fautive. On peut en effet s'aſſurer par les moyens que nous avons expoſés plus haut, que les coefficiens A, B, C &c. ſeront ou tous réels, ou tout au plus quelques-uns égaux à zéro ; & qu'ainſi on

pourra toujours les déterminer par la méthode de M. Bernoulli.

CXXIX.

Application à un exemple.

Soit proposé d'intégrer la fraction $\frac{xx\,dx}{(e+fx)^2\cdot(g+hx)^2}$, je la suppose égale à $\frac{A\,dx+Bx\,dx}{(e+fx)^2}+\frac{C\,dx+Dx\,dx}{(g+hx)^2}$, ce qui donnera en pratiquant ce qui est prescrit dans le Problême précédent, & en ôtant dx qu'on remettra après l'opération,

$$xx = \left\{\begin{array}{l} Agg+2Aghx+Ahhxx \\ \quad +Bggx+2Bghxx+Bhhx^3 \\ +Cee+2Cefx+Cffxx \\ \quad +Deex+2Defxx+Dffx^3. \end{array}\right.$$

La seconde opération que nous avons dit qu'il falloit faire, c'est de supposer

$$Agg+Cee=0.$$
$$2Aghx+Bggx+2Cefx+Deex=0$$
$$Ahhxx+2Bghxx+Cffxx+2Defxx=xx$$
$$Bhhx^3+Dffx^3=0.$$

Ensuite on résoudra ces quatre équations par les méthodes algébriques ordinaires ; leur résolution nous donnera les valeurs de A, B, C, D ; après quoi on intégrera aisément.

CL.

Cas où l'on peut abréger la méthode du Problême précédent.

REMARQUE. On peut quelquefois abréger la méthode du Problême précédent : par exemple, lorsque la fraction rationelle différentielle a cette forme $\frac{x^\theta\,dx}{(e+fx)^\nu\cdot(g+hx)^\lambda}$.

Car ſuppoſant $\frac{x^\theta}{(e+fx)\cdot(g+hx)^\lambda} = \frac{A}{e+fx} + \frac{B+Cx+Dx^2\ldots+Gx^{\lambda-1}}{(g+hx)^\lambda}$, on aura $x^\theta = A\cdot(g+hx)^\lambda + (B+Cx+Dxx\ldots\ldots+Gx^{\lambda-1})\times(e+fx)$. Mais la ſuppoſition de $e+fx=0$ donne $x^\theta = A\cdot(g+hx)^\lambda$; $x = -\frac{e}{f}$; $x^\theta = \pm\frac{e^\theta}{f^\theta}$: donc $\pm\frac{e^\theta}{f^\theta} = A\times(g-\frac{he}{f})^\lambda$, & $A = \frac{\pm\frac{e^\theta}{f^\theta}\times f^\lambda}{(fg-eh)^\lambda}$, en prenant le ſigne +, lorſque $\theta = 0$, ou un nombre pair, & le ſigne — lorſque θ eſt un nombre impair.

La valeur de A étant ainſi trouvée, on aura facilement celles de B, C, D par la méthode du dernier Problême. Car, comme on y a vu, on aura $Ag^\lambda + Be = 0$, lorſque θ eſt un nombre entier poſitif; donc $B = -\frac{g^\lambda}{e}\times A = \frac{\mp g^\lambda e^{\theta-1} f^{\lambda-\theta}}{(fg-eh)^\lambda}$. De même puiſque $\lambda g^{\lambda-1}hx$ eſt le ſecond terme de la quantité $g+hx$ élevée à la puiſſance λ, on aura $\lambda g^{\lambda-1}hA + Bf + Ce = 0$, lorſque θ eſt plus grand que l'unité, ou $\lambda g^{\lambda-1}hA + Bf + Ce = 1$, lorſque $\theta = 1$; on trouvera par cette équation la valeur de C, & ainſi des autres.

CLI.

La fraction $\frac{a+bx+cxx\ \&c.}{(e+fx)\cdot(g+hx)^\lambda}$ ſe réſoudra par la même méthode. Car on fera $\frac{a+bx+cxx\ \&c.}{(e+fx)\cdot(g+hx)^\lambda} = \frac{A}{e+fx} +$ Autre exemple.

$\frac{B+Cx+Dx^2 \ldots + Gx^{\lambda-1}}{(g+hx)^\lambda}$; ainſi on trouvera $A = \frac{af^\lambda - bef^{\lambda-1} + cef^{\lambda-2} - \&c.}{(fg-eh)^\lambda}$. On aura enſuite $Ag^\lambda + Be = a$, ce qui donne $B = \frac{a - Ag^\lambda}{e} =$ (en mettant pour A ſa valeur) $\frac{a}{e} \frac{- af^\lambda g^\lambda + beg^\lambda f^{\lambda-1} - ceg\lambda f^{\lambda-2} + \&c.}{e \times (fg-eh)^\lambda}$. On trouvera de la même maniere les valeurs de C, D, &c.

CLII.

Il eſt viſible que les termes les plus difficiles à intégrer dans la fraction rationelle ainſi transformée ſeront de cette forme $\frac{Ax^m dx}{(x+B)^n}$. (A & B étant des conſtantes, & m, n des nombres entiers poſitifs). Or ces termes peuvent s'intégrer aiſément ſoit en entier, ſoit par logarithmes (Art. XVI.) en faiſant $x + B = z$.

SCHOLIE. Par le moyen de ces regles pour déterminer les coefficiens des numérateurs des fractions rationelles, on peut ſe ſervir de la méthode de M. Bernoulli ſans craindre aucune erreur. Paſſons au cas des racines imaginaires.

CLIII.

2°. Cas où le dénominateur a ſes racines imaginaires.

Inconvénient de la méthode de M. Bernoulli dans ce cas.

Dans le cas où le dénominateur a ſes racines toutes imaginaires, ſi on ſuivoit la méthode de M. Bernoulli, on auroit une expreſſion chargée d'imaginaires auſſi impoſſible à conſtruire ſous cette forme que le ſeroit une équation du troiſieme degré dans le cas irréductible, ſi on la conſtruiſoit

en ſuivant la forme de la racine. Il faut donc chercher par une autre voie l'intégration de ces quantités.

Prenons d'abord le cas le plus ſimple, lorſque le dénominateur a deux racines imaginaires.

CLIV.

PROBLEME 6. Intégrer une fraction rationelle dont le dénominateur eſt le produit de deux racines imaginaires.

Dans ce cas on y ſubſtitue notre méthode du Problême 2.

SOLUTION. Soit la fraction repréſentée dans ce cas par $\frac{l\,dx + m\,x\,dx}{xx + fx + g}$. Je fais d'abord évanouir le ſecond terme du dénominateur en ſuppoſant ſelon la regle connue par tous les Algébriſtes $x + \frac{f}{2} = z$, ce qui donne après les ſubſtitutions ordinaires $\frac{l\,dx + m\,x\,dx}{xx + fx + g} = \frac{l\,dz + m\,z\,dz - \frac{mf}{2}\,dz}{zz + \frac{ff}{4} + g}$, & en faiſant $l - \frac{mf}{2} = n$ & (ſi g eſt $> \frac{ff}{4}$), $\frac{ff}{4} + g = pp$, cette quantité devient $\frac{n\,dz}{zz + pp} + \frac{m\,z\,dz}{zz + pp}$, dont la premiere partie eſt l'élément d'un arc de cercle dont z eſt la tangente, & la ſeconde eſt une différentielle logarithmique.

CLV.

REMARQUE 1. Quand $xx + fx + g$ eſt le produit de deux racines imaginaires, xx & g ſont toujours de même ſigne ; d'où il ſuit que s'ils ſont tous deux négatifs, on peut leur donner à l'un & à l'autre le ſigne + en changeant les ſignes haut & bas. Car ſi g avoit le ſigne —, on trouveroit les deux racines réelles.

CLVI.

REMARQUE 2. Lorſque xx n'eſt point délivré de coefficiens, mais qu'il en a un, C par exemple, on diviſera haut & bas par C. Ainſi on peut toujours ſuppoſer dans le cas des racines imaginaires que xx a le ſigne $+$, & eſt ſans coefficiens.

Il ne nous reſte donc plus que deux choſes à ſavoir, 1°. ſi on peut toujours repréſenter les racines imaginaires par des facteurs trinomes réels ; or nous avons démontré dans l'Introduction Art. LXXXII. que cela eſt toujours poſſible. 2°. Il faut trouver la méthode de déterminer les coefficiens n & m du numérateur. Nous allons la donner dans le Problême ſuivant.

CLVII.

Uſage de la méthode de M. Cotes dans le cas des racines imaginaires, pour déterminer les coefficiens du numérateur.

PROBLEME 7. Déterminer les coefficiens du numérateur des fractions partielles dans leſquelles ſe réſout une fraction rationelle, en ſuppoſant que les racines du dénominateur ſont toutes imaginaires.

SOLUTION. Soit cette fraction rationelle repréſentée par $\frac{x^{\theta}}{L+Mx+Nx^{2}+Px^{3}\ldots\ldots+Ux^{\lambda}}$ (on ſuppoſe toujours $\theta<\lambda$) $=\frac{A+Bx}{a+bx+cxx}\ \frac{+C+Dx}{e+fx+gxx}\ \frac{+E+Fx}{h+kx+lxx}$. Soit pour abréger le calcul $\overline{e+fx+gxx}\times\overline{h+kx+lxx}=Q$; $\overline{a+bx+cxx}\times\overline{h+kx+lxx}=R$; $\overline{a+bx+cxx}\times\overline{e+fx+gxx}=S$; on aura, comme dans les Problêmes précédens

précédens, $x^{\theta} = \overline{A+Bx} \times Q + \overline{C+Dx} \times R + \overline{E+Fx} \times S +$ &c. Maintenant si on suppose $a+bx+cxx=0$, on aura $R=0$, $S=0$, donc $x^{\theta} = \overline{A+Bx} \times Q$; & si les racines de l'équation $a+bx+cxx=0$ sont $m+nx=0$, $p+qx=0$, on aura $x=-\frac{m}{n}$, & $x=-\frac{p}{q}$. Lorsque $x=-\frac{m}{n}$, on a $Q = \overline{e-f\times\frac{m}{n}+g\times\frac{m^2}{n^2}} \times \overline{h-k\times\frac{m}{n}+l\times\frac{m^2}{n^2}} \times$ &c. & lorsque $x=-\frac{p}{q}$, $Q = \overline{e-f\times\frac{p}{q}+g\times\frac{p^2}{q^2}} \times \overline{h-k\times\frac{p}{q}+l\times\frac{p^2}{q^2}} \times$ &c. Pour distinguer cette derniere valeur de Q de la premiere nous la marquerons par Q''. Ainsi pour les deux différentes valeurs de x, l'équation $x^{\theta} = \overline{A+Bx} \times Q$ se résout dans les deux suivantes $-\frac{m^{\theta}}{n^{\theta}} = \overline{A-B\times\frac{m}{n}} \times Q$; & $-\frac{p^{\theta}}{q^{\theta}} = \overline{A-B\times\frac{p}{q}} \times Q'$; donc on a $A = \frac{-\frac{m^{\theta}}{n^{\theta}}+B\frac{m}{n}}{Q}$ & $A = \frac{-\frac{p^{\theta}}{q^{\theta}}+B\frac{p}{q}}{Q''}$. Comparant ces deux valeurs de A, on trouve celle de $B = \frac{Q'\times\frac{q\,m^{\theta-1}}{p\,n^{\theta-1}} - Q\times\frac{n\,p^{\theta-1}}{m\,q^{\theta-1}}}{\overline{\frac{q}{p}-\frac{n}{m}}\times QQ'}$. Prenant de même les deux valeurs de B dans les deux équations $-\frac{m^{\theta}}{n^{\theta}} = \overline{A-B\times\frac{m}{n}} \times Q$, $-\frac{p^{\theta}}{q^{\theta}} = \overline{A-B\times\frac{p}{q}} \times Q'$, & comparant ensemble ces deux valeurs, on en tire $A = \frac{Q'\times\frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}} - Q\times\frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}}}{\overline{\frac{q}{p}-\frac{n}{m}}\times QQ'}$. Ces valeurs supposent que θ est

un nombre impair : mais lorſque $\theta = 0$, ou un nombre pair, on aura alors les valeurs ſuivantes $A = \frac{Q \times \frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}} - Q' \times \frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}}}{\frac{q}{p} - \frac{n}{m} \times QQ'}$ & $B = \frac{Q \times \frac{np^{\theta-1}}{mq^{\theta-1}} - Q' \times \frac{qm^{\theta-1}}{pn^{\theta-1}}}{\frac{q}{p} - \frac{n}{m} \cdot QQ'}$.

Pareillement en ſuppoſant $e + fx + gxx = 0$, on a $Q = 0$, $S = 0$, &c. & $x^{\theta} = \overline{C + Dx} \times R$; & ſi $r + sx = 0$, $t + vx = 0$ ſont les racines de l'équation $e + fx + gxx = 0$, on aura $x = -\frac{r}{s}$, & $x = -\frac{t}{v}$, d'où par un calcul ſemblable à celui que nous venons de faire pour A & pour B, on trouvera $C = \frac{\pm R \times \frac{t^{\theta-1}}{v^{\theta-1}} \mp R' \times \frac{r^{\theta-1}}{s^{\theta-1}}}{\frac{v}{t} - \frac{s}{r} \times RR'}$ & $D = \frac{\pm R \times \frac{st^{\theta-1}}{rv^{\theta-1}} \mp R \times \frac{vr^{\theta-1}}{ts^{\theta-1}}}{\frac{v}{t} - \frac{s}{r} \times RR''}$.

Il faut ſe ſervir des ſignes $+-$, lorſque θ eſt un nombre pair ou zéro, & des ſignes $-+$, lorſque c'eſt un nombre impair. On trouvera de même les valeurs de E, F, &c.

CLVIII.

COROLLAIRE 1. Si la fraction étoit $\frac{dx}{(e+fx+gxx)^{\delta} \cdot (h+kx+lxx)^{\lambda}}$ il la faudroit ſuppoſer égale à $\frac{(Rx^{2\delta-1} \ldots + Q) \cdot dx}{(e+fx+gxx)^{\delta}} + \frac{(Sx^{2\lambda-1} \ldots + P) \cdot dx}{(h+kx+lxx)^{\lambda}}$ & déterminer les coefficiens par la méthode du Problême 5.

COROLLAIRE 2. Si la propoſée étoit $\frac{dx}{(e+fx+gxx) \cdot (h+kx+lxx)^{\lambda}}$, on la feroit $= \frac{Adx + Bxdx}{e+fx+gxx} + \frac{C + Dx + Exx \ldots + Hx^{\lambda-1}}{(h+kx+lxx)^{\lambda}}$,

& on détermineroit les coefficiens comme on a fait dans la remarque qui ſuit le Problême 5.

CLIX.

La difficulté ſe réduit donc à ſavoir intégrer une fraction de cette forme $\frac{Ax^m dx}{(B+Cx+Fxx)^n}$; (A, B, C, F étant des coefficiens quelconques, & m, n étant des nombres entiers poſitifs) : or par la méthode expoſée dans les articles CLIV. CLV. CLVI. on réduira d'abord l'intégration à celle de différentes quantités dont chacune ſera de cette forme $\frac{Gz^r dx}{(zz+pp)^n}$; r étant un nombre entier impair ou pair. Dans le premier cas ſoit $zz+pp=uu$, on aura une transformée compoſée d'une ſuite de termes tous de cette forme $Hu^q du$ (q étant poſitif ou négatif) : ainſi l'intégration n'aura aucune difficulté. Dans le ſecond cas où r eſt un nombre pair, on fera $zz+pp=uu$, & on trouvera que la transformée ſera compoſée de termes de cette forme $\frac{Lu^s du}{\sqrt{(uu-pp)}}$, ($s$ étant un nombre pair poſitif ou négatif) : & cette quantité s'integre ou abſolument, quand s eſt négative (Art. C.), ou par la quadrature du cercle (Art. XCVI.) lorſque s eſt poſitive.

CLX.

Application des formules du Problême 7. à un exemple.

Soit cherchée l'intégrale de cette fraction $\frac{x^3 dx}{(a+bx+cxx).(e+fx+gxx)}$ dont le dénominateur a ſes racines imaginaires.

Pour la trouver nous ſuppoſerons d'abord la fraction ſans dx, il ſera facile de la remettre après l'opération. Cela poſé je l'égale à la ſomme des deux ſuivantes $\frac{A+Bx}{a+bx+cxx} + \frac{C+Dx}{e+fx+gxx}$, ce qui donne $x^\theta = (A+Bx) \times (e+fx+gxx) + (C+Dx) \times (a+bx+cxx)$; donc $Q = e+fx+gxx$, $R = a+bx+cxx$; donc $x^\theta = (A+Bx) \times Q + (C+Dx) \times R$. Si on ſuppoſe $a+bx+cxx = 0$, on a $R = 0$; & en continuant l'opération comme dans le Problême 7, à cauſe que $\theta = 3$ eſt un nombre impair, on trouvera

$$A = \frac{Q'' \times \frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}} - Q \times \frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}}}{\left\{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}\right\} \cdot QQ''} = \frac{Q'' \times \frac{m^2}{n^2} - Q \times \frac{p^2}{q^2}}{\left\{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}\right\} QQ''}.$$

Si on ſuppoſe $a+bx+cxx = (m+nx) \times (p+qx) = mp+mqx+npx+nqxx$, on aura $mp = a$; $mq+np = b$; $nq = c$; $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{b}{c}$, & $\frac{mm}{nn} + \frac{2mp}{nq} + \frac{pp}{qq} = \frac{bb}{cc}$; & mettant pour $\frac{2mp}{nq}$ ſa valeur $\frac{2a}{c}$, on a $\frac{mm}{nn} + \frac{pp}{qq} = \frac{bb}{cc} - \frac{2a}{c}$. On aura auſſi $Q = e - f \times \frac{m}{n} + g \times \frac{mm}{nn}$; $Q'' = e - f \times \frac{p}{q} + g \times \frac{pp}{qq}$: d'où on déduit $Q'' \times \frac{mm}{nn} - Q \times \frac{pp}{qq} = \frac{m^2}{n^2} \times e - \frac{m^2 p}{n^2 q} \times f + \frac{m^2 p^2}{n^2 q^2} \times g - \frac{p^2}{q^2} \times e + \frac{mp^2}{nq^2} \times f - \frac{m^2 p^2}{n^2 q^2} \times g = \left\{\frac{m^2 q^2 - n^2 p^2}{n^2 q^2}\right\} \times e - \left\{\frac{m^2 pq - mnp^2}{n^2 q^2}\right\} \times f$: & ſi on diviſe cette derniere quantité par $\frac{q}{p} - \frac{n}{m} = \frac{mq-np}{mp}$, le quotient eſt $\frac{mp \times (mq+np)}{n^2 q^2} \times e - \frac{m^2 p^2}{n^2 q^2} \times f = \frac{ab}{cc} \times e - \frac{aa}{cc} \times f$.

Si on cherche de même la valeur de QQ'', on trouve

$A = \frac{abe - aaf}{ccee - becf + bbeg - 2aceg + acff - abfg + aagg} = \frac{abe - aaf}{(ec-ag)^2 + (bg-cf)\times(be-af)}$. Pareillement en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation $B = \frac{Q'' \times \frac{qm^{\theta-1}}{pn^{\theta-1}} - Q \times \frac{np^{\theta-1}}{mq^{\theta-1}}}{\left\{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}\right\} \cdot QQ''}$, on trouve $B = \frac{bbe - ace - abf + aag}{(ec-ag)^2 + (bg-cf)\times(be-af)}$.

Pour trouver les valeurs de C & D, il eſt inutile de faire un calcul ſemblable à celui qu'on vient de faire pour A & B. Car en comparant enſemble les formules, on voit que la formule qui donne la valeur de C eſt ſemblable à celle de A, & la formule de D à celle de B & que tout le changement néceſſaire conſiſte à ſubſtituer a, b, c, à la place de e, f, g; par conſéquent on aura $C = \frac{aef - bee}{(ec-ag)^2 + (bg-cf)\times(be-af)}$ & $D = \frac{aff - bef - aeg + eec}{(ec-ag)^2 + (bg-cf)\times(be-af)}$. On a donc toutes les valeurs des indéterminées. Subſtituant donc ces valeurs à la place de A, B, C, D, & remettant dx dans les fractions partielles $\frac{Adx + Bxdx}{a + bx + cxx} + \frac{Cdx + Dxdx}{e + fx + gxx}$, délivrant xx de ſes coefficiens de la maniere qu'il eſt dit (Art. CLVI.), il eſt aiſé de voir qu'on aura deux fractions de la forme de $\frac{ldx + mxdx}{xx + fx + g}$, qu'on intégrera ſéparément par la méthode du Problême 6.

Nous n'avons plus à examiner que le cas où les racines du dénominateur ſont en partie réelles & en partie imaginaires.

CLXI.

3e. Cas. Lorſque les racines du dénominateur ſont en partie réelles & en partie imaginaires.

PROBLEME 8. Déterminer les coefficiens du numérateur, lorſque les racines du dénominateur ſont en partie réelles & en partie imaginaires.

Uſage de la méthode de M. Cotes dans ce cas.

SOLUTION. Dans ce cas on ſuppoſera la fraction repréſentée par $\frac{x^\theta}{L+Mx+Nx^2+Px^3\ldots+Ux^\lambda} = \frac{A+Bx}{a+bx+cxx} + \frac{C+Dx}{e+fx+gxx} + \frac{H}{k+lx}$: alors comparant avec les formules du Problême 7, on aura $Q=(e+fx+gxx)\times(k+lx)$: $R=(a+bx+cxx)\times(k+lx)$: $S=(a+bx+cxx)\times(e+fx+gxx)$. Or en examinant ces différentes valeurs il eſt aiſé d'appercevoir la ſimilitude des formules qui expriment les quantités A, B, C, D avec celles du Problême 7. La ſuppoſition de $k+lx=0$ nous donne

$$Q = 0$$
$$R = 0$$
$$\&\ \ldots\ldots\ldots\ -\frac{k}{l} = x$$
$$\&\ \ldots\ldots\ldots\ -\frac{k^\theta}{l^\theta} = H\times S$$
$$\&\ \ldots\ldots\ldots\ H = -\frac{k^\theta}{l^\theta}\times\frac{1}{S}$$

S étant $=(a-b\times\frac{k}{l}+c\times\frac{kk}{ll})\times(e-f\times\frac{k}{l}+g\times\frac{kk}{ll})$. C'eſt la même choſe ſoit que λ ſoit pair ou impair.

CLXII.

Application à un exemple.

Soit propoſé d'intégrer la fraction $\frac{1}{L+Mx+Nx^2+Px^3}$. Je ſuppoſe que le dénominateur de cette fraction eſt $(e+fx+gxx)\times(k+lx)$. Cela poſé je fais la fraction entiere égale à la ſomme des deux ſuivantes $\frac{A+Bx}{e+fx+gxx} + \frac{C}{k+lx}$. Je ſuppoſe enſuite $e+fx+gxx=0$: ſi les racines de cette équation ſont $(m+nx)\times(p+qx) =$

$mp + mqx + npx + nqxx$, on a . . . . $mp = e$

$mq + np = f$

$nq = g$,

d'où l'on tire . . . . . $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{f}{g}$.

A préſent comparant la propoſée avec les formules du Problême 7, on voit que $\theta = o$ & par conſéquent

$$A = \frac{Q \times \frac{p^{\theta-1}}{q^{\theta-1}} - Q'' \times \frac{m^{\theta-1}}{n^{\theta-1}}}{\left\{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}\right\} \cdot QQ''} = \frac{Q \times \frac{q}{p} - Q'' \times \frac{n}{m}}{\left\{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}\right\} \cdot QQ''}.$$

Mais le cas préſent donne . . . . $Q = k - l\frac{m}{n}$

& . . . . . $Q'' = k - l\frac{p}{q}$

& $Q \times \frac{q}{p} - Q'' \times \frac{n}{m} = k \cdot \left\{\frac{q}{p} - \frac{n}{m}\right\} - \left\{\frac{m^2q^2 - n^2p^2}{mq \cdot np}\right\} l$.

Diviſons cette quantité par $\frac{q}{p} - \frac{n}{m} = \frac{mq - np}{mp}$, on aura pour quotient $k - \left\{\frac{mq + np}{nq}\right\} \times l = k - l \times \frac{f}{g}$: & parce que $QQ'' = kk - kl \times \left\{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right\} + \frac{mp}{nq} \times ll$ $= kk - \frac{fkl}{g} + \frac{ell}{g}$, il vient enfin $A = \frac{gk - fl}{gkk - fkl + ell}$.

Par un calcul ſemblable on trouve $B = \frac{-gl}{gkk - fkl + ell}$.

Pour trouver la valeur de C, il faut ſe ſervir de la formule du Problême 8, H qui eſt la même que C ici $= \frac{k^\theta}{l^\theta} \times \frac{1}{S}$. Dans l'exemple préſent $\frac{k^\theta}{l^\theta} = 1$, & $S = e - f \times \frac{k}{l} + g \times \frac{kk}{ll}$, ce qui donne $C = \frac{ll}{gkk - fkl + ell}$.

On a donc les valeurs de toutes les indéterminées. Subſtituant ces valeurs & remettant dx, on aura deux fractions partielles dont l'une s'intégrera comme dans le Problême 6, & l'autre ſera une différentielle logarithmique.

CLXIII.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. Donc ſi le dénominateur d'une fraction rationelle eſt ou peut être ſuppoſé $(a+bx)\,.\,(g+hx)\,\ldots$ &c. $\times\,(e+fx)^{\alpha}\,.\,(k+lx)^{\epsilon}\,\ldots$ &c. $\times\,(i+mx+nxx)^{\gamma}\,.\,(p+qx+rxx)^{\varphi}$, il faudra ſuppoſer cette fraction égale à une ſuite d'autres fractions dont les dénominateurs ſoient $a+bx$; $g+hx$; . . . . . ; $(e+fx)^{\alpha}$; $(k+lx)^{\epsilon}$; . . . . . ; $(i+mx+nxx)^{\gamma}$; $(p+qx+rxx)^{\varphi}$ &c. & appliquer enſuite les méthodes expoſées ci-deſſus, tant pour trouver les numérateurs que pour intégrer ces ſortes de fractions ; au moyen de quoi il ne doit plus reſter de difficulté ſur quelque eſpece de fractions rationelles que ce puiſſe être.

CLXIV.

Les numérateurs des fractions rationelles étant déterminés par les méthodes précédentes, comment on trouve les dénominateurs ?

SCHOLIE 1. GÉNÉRAL. Dans tout ce qui précede nous avons ſuppoſé qu'on connoiſſoit les dénominateurs des fractions rationelles différentielles, & nous avons enſeigné la méthode générale de trouver les numérateurs. Mais ces dénominateurs ne ſont pas effectivement connus : il faut donc les trouver. Or nous ſavons que les racines de ces dénominateurs ſont toutes réelles, ou toutes imaginaires, ou en partie réelles & en partie imaginaires.

1°. Lorſqu'elles ſont toutes réelles, il eſt aiſé de les avoir en réſolvant l'équation par les régles ordinaires de l'Algebre, ou en la conſtruiſant géométriquement,

2°.

2°. Lorſqu'elles ſont toutes imaginaires on les trouvera par la méthode enſeignée dans l'Introd. Art. LXXXIX. & ſuiv.

3°. Enfin dans le troiſieme cas on cherchera d'abord les réelles & les imaginaires enſuite.

CLXV.

SCHOLIE 2. Il eſt évident qu'au moyen de tout ce que nous avons dit dans ce Chapitre on peut intégrer ou abſolument, ou par la quadrature du cercle, ou par celle de l'hyperbole, toute fraction rationelle différentielle quelconque. Mais la méthode générale étant très-pénible par elle-même, les Géometres ont cherché des moyens de la ſimplifier. Ils y ont réuſſi dans quelques cas, & ces cas ſont ceux où le dénominateur a une des deux formes ſuivantes, $bx^{2m} + gx^m + f$, ou $x^n \pm a^n$. Nous allons les examiner dans le Chapitre ſuivant.

CHAPITRE XI.

Examen des cas où le dénominateur eſt $bx^{2m} + gx^m + f$, *ou* $x^n \pm a^n$, *dans leſquels on abrege la méthode générale.*

CLXVI.

SOit $bx^{2m} + gx^m + f$ le dénominateur de la fraction, 1°. on peut diviſer le haut & le bas de la fraction par le coefficient b du terme bx^{2m} : ainſi on peut ſuppoſer

1°. Comment on a le dénominateur de ces ſortes de fractions.

ce terme ſans coefficient. 2°. On peut toujours donner à x^{2m} le ſigne +, puiſque s'il avoit le ſigne — il n'y auroit qu'à changer les ſignes de tous les termes du numérateur & du dénominateur, ce qui ne change pas la valeur de la fraction. Dans cet état le premier terme x^{2m} ayant le ſigne +, le dernier terme qui ſera $\frac{f}{b}$ & que j'appelle q, doit auſſi avoir le ſigne +. Car s'il avoit le ſigne —, on trouveroit, en regardant $x^{2m} + \frac{gx^m}{b} - \frac{f}{b}$ comme une équation du ſecond degré, que ſes facteurs ſeroient $x^m + \frac{g}{2b} + \sqrt{\frac{gg}{4bb} + \frac{f}{b}}$ & $x^m + \frac{g}{2b} - \sqrt{\frac{gg}{4bb} + \frac{f}{b}}$: c'eſt-à-dire qu'on pourroit réſoudre la fraction rationnelle propoſée en deux autres qui auroient pour dénominateur $x^m \pm k$, $x^m \pm l$: or chacune de ces fractions ſe réduiroit au cas de $x^n \pm a^n$ dont nous allons parler plus bas.

3°. Enfin dans le dénominateur $x^{2m} + \frac{g}{b}x^m + q$, on peut toujours regarder q comme égale à une quantité a élevée à la puiſſance $2m$; & prenant a pour le rayon d'un cercle égal à l'unité, on pourra ſuppoſer $a^{2m} = 1$.

Donc toute la difficulté ſe réduit 1°. à intégrer les fractions dont le dénominateur eſt de cette forme $x^{2\lambda} \pm 2tx^{\lambda} + 1$; 2°. à intégrer celles dont le dénominateur eſt $x^n \pm a^n$, n étant un nombre impair. Car s'il étoit pair, & qu'il y eût $+ a^n$, ce cas ſe réduiroit au premier en faiſant $t = 0$. S'il étoit pair, & qu'il y eût $- a^n$, il ſe réduiroit en deux autres facteurs $x^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}}$, & $x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{2}}$,

Nous allons expoſer les méthodes que les Géometres ont trouvées pour intégrer ces ſortes de fractions.

CLXVII.

PROBLEME. Trouver les facteurs de $x^{2\lambda} \pm 2rx^{\lambda} + 1$, & de $x^n \pm a^n$.

Nous avons réſolu ce Problême par le moyen de la diviſion d'un arc de cercle en parties égales dans l'Introduction, Articles LXI. & LXII. pour le premier cas, & Art. LXIII. & LXVI. pour le ſecond.

Il ne nous reſte donc plus qu'à trouver les numérateurs. On les auroit par la méthode générale; mais il y en a une plus ſimple que voici.

CLXVIII.

2°. Comment on trouve les numérateurs.

Suppoſons d'abord que la fraction propoſée ait cette forme $\frac{x^{\theta}}{1+x^{\lambda}}$, ($\lambda$ eſt un nombre impair) enſorte que $1 + x^{\lambda} = L + Mx + Nx^2 + Px^3 \ldots\ldots + Ux^{\lambda}$; on aura $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $U = 1$, & ſi on ſuppoſe (Introduction Art. LXIII.) $1 + x^{\lambda} = (1 - 2ax + xx) \times (1 - 2bx + xx) \times (1 + x)$, &c. on aura $\frac{x^{\theta}}{1+x^{\lambda}} = \frac{A + Bx}{1 - 2ax + xx} + \frac{C + Dx}{1 - 2bx + xx} + \frac{H}{1+x}$ &c.

1°. Quand le dénominateur eſt $1+x^{\lambda}$.

Soit $(1 - 2bx + xx) \times (1 + x) = Q$, $(1 - 2ax + xx) \times (1 + x) = R$ & $(1 - 2ax + xx) \times (1 - 2bx + xx) = S$, voici comment on s'y prendra pour abreger les formules du Problême 7. Soit ſuppoſé $1 - 2ax + xx = 0$, ou

en déduira $x = a \pm \sqrt{aa-1}$. Soit $a+\sqrt{aa-1} = l$, & $a-\sqrt{aa-1} = m$; les deux racines de l'équation $1-2ax+xx=0$ ſeront $x-l=0$, & $x-m=0$; donc $Q = (1-2bl+ll) \times (1+l)$, & $Q'' = (1-2bm+m^2) \times (1+m)$. On aura auſſi $l+m = 2a$, & $lm = 1$.

Or par le Problême 7. $l^\theta = \overline{A+Bl} \times Q$, & $m^\theta = A+Bm \times Q''$; de ces deux équations je tire la valeur de A & celle de B. Car j'ai $\frac{l^\theta}{Ql} - \frac{A}{l} = B$, & $\frac{m^\theta}{Q''m} - \frac{A}{m} = B$. Donc $\frac{l^{\theta-1}}{Q} - \frac{m^{\theta-1}}{Q''} = \frac{A}{l} - \frac{A}{m} = \frac{Am-Al}{lm} =$ (à cauſe que $lm = 1$) $A \times (m-l)$. Donc enfin $A = \frac{l^{\theta-1}}{Q.(m-l)} - \frac{m^{\theta-1}}{Q''.(m-l)}$. En ſuivant le même procédé on trouvera $B = \frac{l^\theta}{Q.(l-m)} - \frac{m^\theta}{Q''.(l-m)}$. Mais puiſque $1+x^\lambda = Q \times (1-2ax+xx)$, on aura ${}_\lambda x^{\lambda-1} dx = dQ \times (1-2ax+xx) + Q \times \overline{2xdx-2adx}$; & dans la ſuppoſition de $1-2ax+xx=0$ & de $x=l$, on a en mettant pour x ſa valeur l, retranchant $dQ \times \overline{1-2ax+xx}$, & diviſant les deux membres de l'équation par dx, on a, dis-je, ${}_\lambda l^{\lambda-1} = Q \times (2l-2a)$.

De même lorſque $x=m$, il viendra en faiſant les mêmes opérations que ci-deſſus, ${}_\lambda m^{\lambda-1} = Q'' \times (2m-2a)$. Or de ce que $l+m=2a$, on a $2l-2a = l-m$, & $2m-2a = m-l$; donc ${}_\lambda l^{\lambda-1} = Q \times \overline{l-m}$, & ${}_\lambda m^{\lambda-1} = Q'' \times \overline{m-l}$: de plus la ſuppoſition de $1-2ax+xx=0$ donne auſſi $1+x^\lambda = 0$; on aura,

donc $x^\lambda = -1$, ou $l^\lambda = -1$, & $m^\lambda = -1$, & par conſéquent $Q \times \overline{l-m} = \lambda l^{\lambda-1} = -\frac{\lambda}{l}$, & $Q' \times \overline{m-l} = \lambda m^{\lambda-1} = -\frac{\lambda}{m}$; mettons ces valeurs dans les formules de A & de B, on trouvera $A = \frac{l^\theta + m^\theta}{\lambda}$, $B = -\frac{(l^{\theta+1} + m^{\theta+1})}{\lambda}$.

Par les mêmes opérations, en ſuppoſant que p & q ſont les racines de $1 - 2bx + xx = 0$, on trouvera $C = \frac{p^\theta + q^\theta}{\lambda}$, $D = -\frac{(p^{\theta+1} + q^{\theta+1})}{\lambda}$.

Pour trouver la valeur de H, on ſuivra la méthode précédente : car ſelon ce qui eſt dit dans le Problême 8, $x^\theta = H \times S$; & ſuppoſant $1 + x = 0$ ou $x = -1$, on a $1 = H \times S$, lorſque θ eſt $= 0$ ou un nombre pair, & $-1 = H \times S$ lorſque θ eſt un nombre impair. Mais puiſque, comme on ſait, $1 + x = S \times (1 + x)$, on a $\lambda x^{\lambda-1} dx = dS \times \overline{1 + x} + S dx$, ce qui donne $S = \lambda$, lorſque $1 + x = 0$: d'où on déduit $H = \frac{1}{\lambda}$, lorſque θ eſt un nombre pair en y comprenant le zéro, & $H = -\frac{1}{\lambda}$, lorſque θ eſt un nombre impair.

CLXIX.

Si le dénominateur de la propoſée a cette forme $1 - x^\lambda$, on aura $\frac{x^\theta}{1 - x^\lambda} = \frac{A + Bx}{1 - 2ax + xx} + \frac{C + Dx}{1 - 2bx + xx} + \frac{G}{1 - x}$; & en faiſant le calcul comme plus haut, on trouve encore $A = \frac{l^\theta + m^\theta}{\lambda}$, $B = -\frac{(l^{\theta+1} + m^{\theta+1})}{\lambda}$, $C = \frac{p^\theta + q^\theta}{\lambda}$, $D = -\frac{(p^{\theta+1} + q^{\theta+1})}{\lambda}$, & $G = \frac{1}{\lambda}$, θ étant un nombre pair ou impair.

CLXX.

REMARQUE. Si on avoit eu $\frac{A+Bx}{1+2ax+xx}$ &c. en supposant encore $x=l$, $x=m$, $x=p$, $x=q$ &c. on auroit eu les mêmes valeurs de A, B, C, D &c.

CLXXI.

2°. Lorsque le dénominateur est $1-2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}$.

Lorsque la fraction est $\frac{x^{\theta}}{1-2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}$, on supposera $1-2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}=\overline{1-2ax+xx}\times\overline{1-2bx+xx}\times\overline{1-2cx+xx}$ &c. & par conséquent $\frac{x^{\theta}}{1-2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}}=\frac{A+Bx}{1-2ax+xx}+\frac{C+Dx}{1-2bx+xx}+\frac{E+Fx}{1-2cx+xx}$ &c. Il est aisé de voir qu'on auroit ici comme dans le cas que nous venons de traiter, $A=\frac{l^{\theta-1}}{Q.\overline{m-l}}-\frac{m^{\theta-1}}{Q''.\overline{m-l}}$, $B=\frac{l^{\theta}}{Q.\overline{l-m}}-\frac{m^{\theta}}{Q''.\overline{l-m}}$. Mais parce que $1-2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}=Q\times(1-2ax+xx)$, on aura en différentiant cette équation $-2t\lambda x^{\lambda-1}dx+2\lambda x^{2\lambda-1}dx=dQ\times(1-2ax+xx)+Q\times\ldots\ldots\overline{2xdx-2adx}$. Faisant les mêmes calculs que dans l'Article CLXVIII, cette équation, lorsque $1-2ax+xx=0$, & $x=l$, se change en $\lambda l^{\lambda-1}\times(l-2t+2l^{\lambda})=Q\times(2l-2a)=$ (à cause de ce qu'on a vu ci-dessus Art. CLXVIII.) $Q\times\overline{l-m}$; & lorsque $x=m$, on a $\lambda m^{\lambda-1}\times(-2t+2m^{\lambda})=Q''\times\overline{2m-2a}=Q''\times\overline{m-l}$: mais puisque la supposition de $1-2ax+xx=0$ donne aussi $1-2tx^{\lambda}+x^{2\lambda}=0$, on en tire $2t=x^{\lambda}+\frac{1}{x^{\lambda}}=l^{\lambda}+\frac{1}{l^{\lambda}}$, $=l^{\lambda}+m^{\lambda}$,

& $2t = x^{\lambda} + \frac{1}{x^{\lambda}} = m^{\lambda} + \frac{1}{m^{\lambda}} = m^{\lambda} + l^{\lambda}$, parce que $lm = 1$ (Art. CLXVIII.), & par conſéquent $l^{\lambda} = \frac{1}{m^{\lambda}}$, & $m^{\lambda} = \frac{1}{l^{\lambda}}$. Mettons cette valeur de $2t$, dans les deux équations ci-deſſus, on a $\lambda l^{\lambda-1} \times \overline{l^{\lambda} - m^{\lambda}} = Q \times \overline{l - m}$, & $\lambda m^{\lambda-1} \times \overline{m^{\lambda} - l^{\lambda}} = Q'' \times \overline{m - l}$; ce qui donne $A = \frac{l^{\theta-1}}{\lambda . l^{\lambda-1} \times (m^{\lambda} - l^{\lambda})} - \frac{m^{\theta-1}}{\lambda . m^{\lambda-1} \times (m^{\lambda} - l^{\lambda})}$ $= \frac{l^{\theta-\lambda}}{\lambda \times (m^{\lambda} - l^{\lambda})} - \frac{m^{\theta-\lambda}}{\lambda \times (m^{\lambda} - l^{\lambda})}$; & $B = \frac{l^{\theta-\lambda+1}}{\lambda \times (l^{\lambda} - m^{\lambda})}$ $- \frac{m^{\theta-\lambda+1}}{\lambda . (l^{\lambda} - m^{\lambda})}$. Le calcul pour trouver C, D &c. eſt le même.

Si on avoit $1 + 2tx^{\lambda} + x^{2\lambda}$, on trouveroit les mêmes valeurs pour A, B, C &c.

CHAPITRE XII.

Maniere de trouver algébriquement dans certains cas les facteurs de $x^n + a^n$ *&* $x^{2m} + px^m + q$.

CLXXII.

NOus avons vu (Art. CLXVII.) comment on trouve les facteurs de $x^n + a^n$ & de $x^{2m} + px^m + q$, par la diviſion d'un arc de cercle en parties égales. Mais lorſque la circonférence ſe diviſe en un nombre de parties repréſentées par un des nombres de la progreſſion géométrique, 1, 2, 4, 8, 16, on ſait qu'une telle diviſion

peut toujours ſe faire géométriquement. Dans ces cas on peut aſſigner non-ſeulement par la diviſion de la circonférence, mais même algébriquement les valeurs des facteurs. Quoique cette recherche ne ſoit pas ici abſolument néceſſaire, puiſque la diviſion de la circonférence eſt plus commode que la conſtruction algébrique, nous croyons cependant qu'elle fera plaiſir à nos lecteurs.

CLXXIII.

Recherche des facteurs de $x^n + a^n$.

PROBLEME. Trouver algébriquement les facteurs de $x^n + a^n$, n étant un nombre de la progreſſion géométrique 2, 4, 8, 16, &c.

1°. Lorſque n eſt un nombre de la progreſſion géométrique 1, 2, 4, 8, 16 &c.

Pour réſoudre ce Problême il faut trouver des facteurs $xx + fx + g$, $xx + hx + i$ &c. où les coefficiens f, g, h, i &c. ſoient des quantités réelles, & qui multipliées l'une par l'autre rendent la quantité $x^n + a^n$. Soit par exemple $x^4 + a^4$, on aura

$$\left.\begin{matrix} x^4 + f \\ + h \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} + g \\ + fh \\ + i \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} + hg \\ + if \end{matrix}\right\} x + gi = x^4 + a^4$$

en multipliant l'un par l'autre les deux trinomes. On tire de cette équation en la comparant avec la donnée $x^4 + a^4$ 1°. $f + h = 0$, 2°. $g + i + fh = 0$, 3°. $hg + if$, ou (à cauſe de $f = -h$) $hg - ih = 0$, 4°. $gi = a^4$. L'équation $hg - ih = 0$ donne ou $g = i$, ou $h = 0$: en ſuppoſant $h = 0$, on a $f = 0$, $g = -i$, $i = \pm\sqrt{-a^4}$; & les facteurs ſont $xx + \sqrt{-a^4}$, $xx - \sqrt{-a^4}$; ce qui

qui étant imaginaire ne fait rien connoître. Mais en ſuppoſant $g = i$, on trouve $g = aa$, $i = aa$, $f = a\sqrt{2}$, $h = -a\sqrt{2}$, de ſorte que les facteurs ſont $xx + ax\sqrt{2} + aa$, $xx - ax\sqrt{2} + aa$ qui ont la condition qu'on demande. On trouvera les compoſans de ces facteurs par la méthode générale de l'Article ſuivant.

CLXXIV.

En général $x^n + a^n$ (n étant un nombre de la progreſſion géométrique 1, 2, 4, 8, 16 &c.) $= (x^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2} + a^{\frac{n}{2}}) \times (x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2} + a^{\frac{n}{2}})$, comme il eſt aiſé de s'en aſſurer en multipliant ces deux quantités l'une par l'autre. Mais il faut outre cela ſavoir ſubdiviſer ces deux derniers facteurs en deux autres, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que l'expoſant de x le plus haut ſoit $= 2$; c'eſt ce qui ſe fera de la maniere ſuivante.

Je prends une quantité comme $x^m + qx^{\frac{m}{2}} + a^m$ dans laquelle m ſoit diviſible par 4. Je cherche les facteurs $x^{\frac{m}{2}} + gx^{\frac{m}{4}} + a^{\frac{m}{2}}$, $x^{\frac{m}{2}} - gx^{\frac{m}{4}} + a^{\frac{m}{2}}$ qui peuvent la compoſer. Multipliant l'un par l'autre ces deux facteurs, il me vient $x^m + 2a^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}} + a^m$: je compare cette

$$- gg x^{\frac{m}{2}}$$

quantité avec $x^m + qx^{\frac{m}{2}} + a^m$: cette comparaiſon me donne $2a^{\frac{m}{2}} - gg = +q$, donc $g = \pm\sqrt{2a^{\frac{m}{2}} - q}$. Par où l'on voit, 1°. que ſi q eſt une quantité négative,

g eſt toujours une quantité réelle ; 2°. que ſi q eſt poſitif & $< 2a^{\frac{m}{2}}$, g ſera encore une quantité réelle. On voit à préſent que les facteurs de $x^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2} + a^{\frac{n}{2}}$, $x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2} + a^{\frac{n}{2}}$ ſont $x^{\frac{n}{4}} \pm a^{\frac{n}{8}} x^{\frac{n}{8}} \sqrt{2 - \sqrt{2}} + a^{\frac{n}{4}}$, & $x^{\frac{n}{4}} \mp a^{\frac{n}{8}} x^{\frac{n}{8}} \sqrt{2 + \sqrt{2}} + a^{\frac{n}{4}}$: car comparant les deux quantités $x^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2} + a^{\frac{n}{2}}$, $x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{4}} x^{\frac{n}{4}} \sqrt{2} + a^{\frac{n}{2}}$ avec $x^m + qx^{\frac{m}{2}} + a^m$,

on a 1°. . . . . $m = \frac{n}{2}$

donc . . . . . $\frac{m}{2} = \frac{n}{4}$

& . . . . . $\frac{m}{4} = \frac{n}{8}$

2°. on a . . . . . $q = \pm a^{\frac{n}{4}} \sqrt{2}$

mettant cette valeur de m & de q à leur place dans l'équation trouvée plus haut $g = \pm \sqrt{(2a^{\frac{m}{2}} - q)}$, elle devient $g = \pm \sqrt{(2a^{\frac{n}{4}} \mp a^{\frac{n}{4}} \sqrt{2})} = \pm \sqrt{a^{\frac{n}{4}}} \times \sqrt{(2 \mp \sqrt{2})} = \pm a^{\frac{n}{8}} \sqrt{(2 \mp \sqrt{2})}$. Donc les facteurs $x^{\frac{m}{2}} + gx^{\frac{m}{4}} + a^{\frac{m}{2}}$ & $x^{\frac{m}{2}} - gx^{\frac{m}{4}} + a^{\frac{m}{2}}$ deviennent $x^{\frac{n}{4}} \pm a^{\frac{n}{8}} x^{\frac{n}{8}} \sqrt{(2 - \sqrt{2})} + a^{\frac{n}{4}}$ & $x^{\frac{n}{4}} \mp a^{\frac{n}{8}} x^{\frac{n}{8}} \sqrt{(2 + \sqrt{2})} + a^{\frac{n}{4}}$, qui ſont les facteurs de $x^n + a^n$.

On trouvera de même les produiſans de ces quatre facteurs. Car g ſera toujours ou négatif ou $< 2a^{\frac{m}{2}}$, puiſque $\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}}$ &c. à l'infini eſt < 2.

Application à un exemple.

Si, par exemple, $x^8 + a^8$ eſt le dénominateur de la fraction, les compoſans ſeront $x^2 + ax\sqrt{2 + \sqrt{2}} + aa$,

$x^2 - ax\sqrt{2+\sqrt{2}} + aa$, $x^2 + ax\sqrt{2-\sqrt{2}} + aa$, $x^2 - ax\sqrt{2-\sqrt{2}} + aa$.

CLXXV.

Si au lieu de $x^n + a^n$ on avoit $x^n + qx^{\frac{n}{2}} + a^n$, alors 1°. ou q eſt $> 2a^{\frac{n}{2}}$, auquel cas les facteurs ſeront $x^{\frac{n}{2}} + \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - a^n}$, $x^{\frac{n}{2}} + \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{qq}{4} - a^n}$, que l'on diviſera enſuite en leurs facteurs trinomes par la méthode de l'Article précédent; ou bien 2°. q ſera $< 2a^{\frac{n}{2}}$: alors les deux facteurs ſeront $x^{\frac{n}{2}} + x^{\frac{n}{4}}\sqrt{2a^{\frac{n}{2}} - q + a^{\frac{n}{2}}}$, & $x^{\frac{n}{2}} - x^{\frac{n}{4}}\sqrt{2a^{\frac{n}{2}} - q + a^{\frac{n}{2}}}$ qui ſe diviſeront de même en leurs facteurs trinomes, & ainſi de ſuite.

CLXXVI.

C'eſt une choſe aſſez ſinguliere que dans le cas où la réſolution de $x^n + qx^{\frac{n}{2}} + a^n$ en ſes facteurs par la regle ordinaire donne un binome compoſé de $x^{\frac{n}{2}} +$ & $-$ une quantité imaginaire, la recherche de ces mêmes facteurs ſuppoſés des trinomes donne des quantités dans leſquelles il n'entre point de coefficiens imaginaires, & au contraire que lorſqu'il y en a dans les trinomes il n'y en ait point dans les binomes. Cette remarque a déja été faite par M. Gabriel Manfredi dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de l'Inſtitut de Bologne, tome 1.

CLXXVII.

En conſidérant $x^n + qx^{\frac{n}{2}} + a^n = 0$ comme une équation, ſi on veut prendre les racines à l'ordinaire, on aura $x^n + qx^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - a^n$; donc $x^{\frac{n}{2}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - a^n}$, ou bien $x^{\frac{n}{4}} = \pm\sqrt{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - a^n}}$: & les racines tirées des deux facteurs $x^{\frac{n}{2}} \pm x^{\frac{n}{4}}\sqrt{2a^{\frac{n}{2}} - q + a^{\frac{n}{2}}}$, ſont $x^{\frac{n}{4}} = -\frac{\sqrt{2a^{\frac{n}{2}} - q} \pm \sqrt{-2a^{\frac{n}{2}} - q}}{2}$ & $x^{\frac{n}{4}} = +\frac{\sqrt{2a^{\frac{n}{2}} - q} \pm \sqrt{-2a^{\frac{n}{2}} - q}}{2}$. Les deux racines précédentes repréſentent les racines $\pm\sqrt{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - a^n}}$.

On voit par-là les $\sqrt[4]{}$ imaginaires réduites à des $\sqrt{}$: on voit auſſi comment il peut arriver quelquefois que des racines réelles ſe préſentent ſous une forme imaginaire.

CLXXVIII.

2°. Lorſque n eſt un nombre ſimplement pair.

Toute la difficulté de trouver algébriquement les diviſeurs trinomes de $x^n + a^n$, lorſque n eſt un nombre ſimplement pair, c'eſt-à-dire, diviſible par 2 & non par 4, ſe réduit à celle de trouver les facteurs trinomes de $x^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}}$.

CLXXIX.

Application à plusieurs exemples.

Premier exemple.

Soit $x^6 + a^6$ le dénominateur de la fraction dont on demande les facteurs. Comme l'on sait que les diviseurs de $x^3 + a^3$, sont $x + a$, $xx - ax + aa$, ce qu'il est aisé de vérifier en multipliant l'un par l'autre ces deux facteurs, on verra que les diviseurs de $x^6 + a^6$ sont $xx + aa$ & $x^4 - aaxx + a^4$. A présent les diviseurs trinomes de $x^4 - aaxx + a^4$ sont $xx + ax\sqrt{3} + aa$, $xx - ax\sqrt{3} + aa$. Car supposant que ces diviseurs sont $xx + fx + aa$, $xx + gx + aa$; les multipliant l'un par l'autre, on trouve

$$\begin{matrix} x^4 + gx^3 + 2a^2x^2 + a^2fx + a^4 \\ + fx^3 + fgx^2 + a^2gx \end{matrix} = 0$$

D'où l'on tire en comparant cette équation avec $x^4 - aaxx + a^4$

1°. . . . . $g + f = 0$

donc . . . . . $g = -f$

2°. on a . . . . . $2aa + fg = -aa$

Donc en réduisant & mettant pour g sa valeur, on a

$3aa - ff = 0$

Donc . . . . . $f = a\sqrt{3}$

& . . . . . $g = -a\sqrt{3}$

Donc &c.

CLXXX.

Second exemple.

De même les facteurs de $x^{10} + a^{10}$ dépendent de ceux de $x^5 + a^5$ qui sont $x + a$, & $x^4 - ax^3 + aaxx -$

$a^3x + a^4$. Si on ſuppoſe maintenant que les diviſeurs trinomes de $x^4 - ax^3 + aaxx - a^3x + a^4$ ſont $xx + fx + aa$, $xx + gx + aa$, faiſant les mêmes opérations que dans l'exemple précédent, on trouvera

1°. . . . . $g + f = -a$

donc . . . . . $g = -a - f$

2°. . . . . $2aa + fg = aa$,

donc en réduiſant & mettant pour g ſa valeur, on a

$$ff + af - aa = 0$$

Donc . . . . $ff + af + \frac{1}{4}aa = a^2 + \frac{1}{4}a^2$

Donc . . . . . $f + \frac{1}{2}a = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Donc enfin . . . . . $f = -\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}$

& . . . . . $g = -\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Donc les facteurs trinomes de $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$ ſont $xx - \left\{\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{2}\right\}x + aa$ & $xx - \left\{\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}\right\}x + aa$; leſquels étant multipliés enſuite par $x + a$, rendent $x^5 + a^5$. On peut obſerver en paſſant, qu'en multipliant l'une par l'autre les deux quantités $-\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}$, & $-\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{2}$, le produit eſt aa. On trouve le même réſultat en mettant dans l'équation $ff + af - aa = 0$ les valeurs de ff & de f en g, à leur place : donc f & g ſont les racines de l'équation $ff + af - aa = 0$.

CLXXXI.

On peut encore, ſi l'on veut, faire la diviſion de $x^4 -$

$ax^3 + aaxx - a^3x + a^4$ par $xx + fx + aa$, & on aura au quotient $xx - (a+f)x + af + ff$, & pour reſte on trouve $-f^3x - af^2x + a^2fx - a^2f^2 - a^3f + a^4$. Suppoſant ce reſte $= 0$, nous avons l'équation $ff + af - aa = 0$ la même qu'on vient de trouver ; ſon autre facteur eſt $-aa - fx$.

CLXXXII.

REMARQUE 1. En ſe ſervant des méthodes que nous venons de donner pour trouver algébriquement les facteurs trinomes de $x^n \pm a^n$, on trouveroit ceux de $x^{2m} \pm px^m + q$.

Les facteurs de $x^{2m} \pm px^m + q$ ſe trouvent par les mêmes procédés que ceux de $x^n \pm a^n$.

CLXXXIII.

REMARQUE 2. La circonférence du cercle pouvant être diviſée géométriquement, c'eſt-à-dire par la regle & le compas, non-ſeulement en 2, 4, 8, &c. mais encore en 3, 5, 15 parties égales, il s'enſuit qu'on pourra aſſigner algébriquement les facteurs de $x^{2m} + px^m + q$ & de $x^n + a^n$ non-ſeulement lorſque m, ou $n = 1, 2, 4, 8$, comme nous l'avons vu plus haut, mais encore toutes les fois que m ou n ſeront des nombres égaux à 3, 5, 15 multipliés par quelqu'un des termes de la progreſſion géométrique 1, 2, 4, 8, 16, &c.

Obſervations particulieres ſur ce qui précede.

CLXXXIV.

REMARQUE 3. Tout facteur $x^{3m} + bx^{2m} + gx^m + q$ pourra toujours ſe réduire au cas général. Car on pourra

toujours regarder ce facteur comme une équation du troiſieme degré compoſée des deux ſuivantes $x^m + g$, & $x^{2m} + hx^m + l$: g, h, & l étant des quantités réelles.

De même tout facteur $x^{4m} + bx^{3m} + cx^{2m} + ex^m + f$ peut être regardé comme compoſé de ces deux facteurs trinomes $x^{2m} + kx^m + q$, $x^{2m} + ix^m + p$, dans leſquels les coefficiens ſeront réels (Art. LXXXIII. Introduct.). Enfin $x^{5m} \ldots\ldots + S$ peut ſe réduire en deux facteurs l'un quatrinome, l'autre ſimple où tous les coefficiens ſeront réels.

CHAPITRE XIII.

Des différentielles qui peuvent ſe ramener à des fractions rationelles.

CLXXXV.

IL eſt évident par les Chapitres précédens que toute fraction rationelle différentielle non intégrable algébriquement, dépend pour ſon intégration de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, ou, ce qui revient au même, de la rectification du cercle ou de la parabole. Donc toute différentielle qui par transformation pourra ſe réduire à des fractions rationelles, s'intégrera ou abſolument, ou par les mêmes quadratures ou rectifications.

Nous allons examiner ici les cas généraux dans leſquels cette transformation peut ſe faire avec ſuccès.

CLXXXVI.

CLXXXVI.

1°. $\frac{x^{\frac{m}{r}}\,dx}{e+fx^{n}}$ deviendra rationelle en ſuppoſant $x^{\frac{1}{r}} = z$. Car on aura $x = z^{r}$, $dx = rz^{r-1}\,dz$, & $x^{n} = z^{rn}$. Donc en ſubſtituant dans la propoſée pour x & dx, leurs valeurs en z & en dz, on aura la transformée ſuivante $\frac{rz^{m+r-1}\,dz}{e+fz^{rn}}$, qu'on voit bien être une fraction rationelle, m, r, & n étant des nombres entiers.

Examen des différentielles les plus générales qui peuvent ſe transformer en fractions rationelles.

CLXXXVII.

2°. La transformation réuſſira dans les différentielles qui contiendront tant de puiſſances $x^{\frac{\delta}{\lambda}}$, $x^{\frac{m}{n}}$, &c. qu'on voudra ſans aucun autre radical. Par exemple, ſi j'avois $\frac{x^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\frac{\delta}{\lambda}} \cdot x^{\frac{\tau}{\varphi}} \cdot dx}{e+fx^{k}}$, je donnerois à la propoſée la forme ſuivante $\frac{x^{\frac{m}{n}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{\tau}{\varphi}}\,dx}{e+fx^{k}}$: je réduis enſuite tous les expoſans fractionaires au même dénominateur q, & je fais $x^{\frac{1}{q}} = z$, & par conſéquent $x = z^{q}$, $dx = qz^{q-1}\,dz$. Par ce moyen tous les radicaux diſparoiſſent, & la fraction propoſée devient rationelle.

CLXXXVIII.

3°. Que la fraction propoſée contienne au numérateur $\left\{\frac{\alpha+\epsilon x}{\delta+\gamma x}\right\}^{\frac{\tau}{\lambda}}$, $\left\{\frac{\alpha+\epsilon x}{\delta+\gamma x}\right\}^{\frac{\mu}{\upsilon}}$, ſans autres radicaux, le

dénominateur étant toujours $e+fx^k$, on la réduiroit au cas précédent en faiſant $\frac{\alpha+\epsilon x}{\delta+\gamma x}=z$.

CLXXXIX.

4°. A plus forte raiſon ſi elle contenoit ſimplement $(\alpha+\epsilon x)^{\frac{\tau}{\lambda}}$.

CXC.

5°. Si j'ai à intégrer $\frac{x^{\frac{p}{q}}dx}{(a+bx)^{\frac{n}{r}}}$, je mets d'abord cette fraction ſous la forme ſuivante $\frac{x^{\frac{pr}{qr}}dx}{(a+bx)^{\frac{nq}{qr}}}$. Je la multiplie enſuite haut & bas par $x^{\frac{nq}{qr}}$, ou par $(a+bx)^{\frac{pr}{qr}}$. Soit à préſent $\frac{x}{a+bx}$ ou $\frac{a+bx}{x}=z$, pratiquant le reſte de l'opération, on parvient à une transformée rationelle ſi $\frac{pr\mp nq}{qr}$ eſt un nombre entier.

CXCI.

6°. En faiſant $x^n=z$, on ramenera au troiſieme cas la fraction ſuivante $\frac{dx}{x.(a+bx^n)^{\frac{q}{n}}}$, n & q étant tout ce qu'on voudra.

CXCII.

7°. Si la différentielle ne contient point d'autre radical que $(a+bx\pm cxx)^{\frac{m}{2}}$, m étant un nombre impair, alors on la pourra réduire en fraction rationelle. Car pour dégager de deſſous le ſigne radical ce qui en peut être ôté,

on changera le radical en $\sqrt{\left\{\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}\pm xx\right\}}$. Or on connoît pluſieurs façons de faire évanouir ce radical. 1°. Si on a $+xx$, on ſuppoſera $x+z=\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}+xx}$, ce qui donne en quarrant $xx+2xz+zz=\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}+xx$, & en réduiſant $x=\frac{czz-a}{b-2cz}$. 2°. Si on a $-xx$ on ſuppoſera le radical $\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}-xx}=\sqrt{f+x}\times\sqrt{g-x}$, ou $\sqrt{-f+x}\times\sqrt{g-x}$. Je fais à préſent $\sqrt{\pm f+x}\times\sqrt{g-x}=(g-x)z$, ou $(\sqrt{g-x}\times\sqrt{g-x})z$, j'en tirerai $\sqrt{\pm f+x}=z\sqrt{g-x}$; donc $\pm f+x=(g-x)zz$; donc $x+xzz=gzz\mp f$, & enfin $x=\frac{gzz\mp f}{zz+1}$.

CXCIII.

8°. Que l'on ait dans la fraction différentielle propoſée $(a+bx)^{\frac{n}{2}}$ & $(c+fx)^{\frac{m}{2}}$ ſans autres expreſſions radicales, m & n repréſentant des nombres impairs, on la réduira à la précédente, en faiſant $c+fx=zz$, ce qui donnera $(c+fx)^{\frac{m}{2}}=z^m$ &c.

CXCIV.

9°. Si la fraction a pour numérateur $X.(a+bx)^{\frac{n}{2}}$, & pour dénominateur $X'(f+gx)^{\frac{m}{2}}+X''(c+hx)^{\frac{r}{2}}$ (X, X', X'' déſignant des fonctions rationelles quelconques de x), on multipliera le haut & le bas de la fraction par $X'(f+gx)^{\frac{m}{2}}-X''(c+hx)^{\frac{r}{2}}$. On voit que par

cette opération le dénominateur devient $X' \times X'(f+gx)^m - X'' X''(c+bx)^r$ quantité qui n'a plus de radicaux, & le numérateur ſe réduit au cas du N°. 3.

CXCV.

10°. Si la fraction propoſée a pour numérateur une fonction rationelle de x, & pour dénominateur $X + X' \cdot (a+bx)^{\frac{n}{2}} + X''(f+gx)^{\frac{m}{2}}$, on la réduira à la précédente en multipliant haut & bas par $X + X'(a+bx)^{\frac{n}{2}} - X'' \cdot (f+gx)^{\frac{m}{2}}$.

CXCVI.

11°. Quand la fraction aura pour dénominateur $X \cdot (c+fx+gxx)^{\frac{m}{2}} + X'(a+bx+cxx)^{\frac{n}{2}}$, on la réduira à celle du N°. 7 en multipliant le numérateur & le dénominateur par $X \cdot (c+fx+gxx)^{\frac{m}{2}} - X'(a+bx+cxx)^{\frac{n}{2}}$.

CXCVII.

Enfin ſi la propoſée contient $\sqrt[m]{\left\{a+b\sqrt[n]{c+e\sqrt[f]{\ }} + \&c.\ \left(\frac{g+hx}{l+mx}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right\}}$ δ étant un nombre entier poſitif ou négatif, a, b, c, &c. des conſtantes, & m, n, f, &c. des nombres entiers poſitifs ou négatifs, on pourra faire diſparoître tous les radicaux l'un après l'autre, en ſuppoſant la quantité $\sqrt[m]{(a+b\sqrt[n]{c+}\ \&c.)}$ égale à une quantité ſimple z, ce qui donnera une valeur rationelle de x en z,

par le moyen de laquelle la différentielle donnée pourra être changée en fraction rationelle.

CXCVIII.

REMARQUE. On pourra ſimplifier quelquefois la transformation. Car $x^{n-1}dx$ multiplié par une fonction rationelle de x^n, n étant quelconque, ſe réduit à une fraction rationelle, en faiſant $x^n = z$.

Et en général ſi ci-deſſus on met par-tout $x^{n-1}dx$ pour dx, & x^n pour x, il n'y aura qu'à faire $x^n = z$, & on retombera dans les mêmes cas.

CXCIX.

Voilà ce qu'il eſt important de ſavoir ſur les fractions rationelles différentielles, & ce qu'on peut regarder comme le réſultat de ce qu'ont écrit ſur cette matiere Mrs Bernoulli, Cotes, & pluſieurs autres. Voyez Mém. Acad. Berlin 1746. Au reſte l'article des fractions rationelles eſt un des plus importans & des plus étendus de tout le Calcul intégral, & la maniere dont on l'a traité ici pourra être fort utile aux commençans.

Concluſion de ce qui regarde les fractions rationelles.

Quels ſont les Auteurs qui ont écrit ſur cette matiere.

CHAPITRE XIV.

Des différentielles qui ſe rapportent à la rectification de l'ellipſe ou de l'hyperbole.

CC.

Quels ſont les Géometres qui ont travaillé ſur cette matiere.

M^R. Maclaurin dans ſon *Traité des Fluxions* ſecond volume, page 225. a donné quelques recherches ſur les différentielles réductibles à la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole; mais ſon travail ſur cette matiere n'étant pas complet, M. d'Alembert l'a continué dans la ſeconde partie d'un Mémoire ſur le Calcul intégral imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin, tome 4. C'eſt d'après ces deux grands Géometres que nous allons expoſer ici ce qu'on ſait ſur cette matiere.

CCI.

1°. Elément de la rectification d'une Ellipſe dont le grand axe eſt $2a$, & le parametre p.

LEMME 1. Soit une ellipſe dont le grand axe $Aa' = 2a$, le parametre $= p$, ſuppoſons que les coupées KB, Ke &c. priſes depuis le centre K ſont x, les ordonnées BC, ex, y, l'équation de l'ellipſe ſera $\frac{2a}{p}yy = aa - xx$, ou $2ayy = aap - pxx$. Prenant les différences il vient $4aydy = -2pxdx$ ou $\frac{2a}{p}ydy = -xdx$, d'où l'on tire $dy = -\frac{pxdx}{2ay}$ & $dy^2 = \frac{ppxx}{4aayy}dx^2 = \frac{ppxx}{2a \times 2ayy}dx^2$, = (en mettant pour $2ayy$ ſa valeur) $\frac{pxx}{2a^2 - 2axx}dx^2$. Subſtituant

Figure 6.

cette valeur de dy^2 dans la formule (de l'Art. 91.) $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouve $du = \sqrt{dx^2 + \frac{pxx\,dx^2}{2a^3 - 2axx}} = dx\sqrt{1 + \frac{pxx}{2a^3 - 2axx}} = dx\sqrt{\frac{px^2 - 2ax^2 + 2a^3}{2a^3 - 2axx}}$, & en divisant haut & bas par $2a$, on a $dx\sqrt{\frac{aa + \frac{p-2a}{2a}xx}{aa - xx}} = dx\sqrt{\frac{aa + \frac{(p-1)}{2a}\cdot xx}{aa - xx}}$ pour l'élément de l'ellipse en question. Par la propriété connue de l'ellipse on aura $2pa$ égal au quarré du demi-axe conjugué. Donc si l'on fait $\frac{p}{2a} = q$, le quarré du même demi-axe conjugué sera $4qaa$. Soit à présent $aa + (q-1)\times xx = az$, on aura $xx = \frac{az - aa}{q-1}$, $2x\,dx = \frac{a\,dz}{q-1}$, $dx = \frac{a\,dz}{q-1\,.\,2\sqrt{az - aa}} = \frac{a\,dz}{\sqrt{q-1}\,.\,2\sqrt{az-aa}}$: substituant cette valeur dans l'équation $du = dx\,\frac{\sqrt{(aa + (q-1)xx)}}{\sqrt{(aa - xx)}}$, on aura $du = \frac{adz\sqrt{az}}{\sqrt{q-1}\,.\,2\sqrt{az-aa}\,.\,\sqrt{\frac{aa-az+aa}{(q-1)}}} = \frac{adz\sqrt{az}}{2\sqrt{az-aa}\,.\,\sqrt{qaa-az}}$

$= \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{z-a}\,.\,\sqrt{qa-z}} = \frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{(qa+a)z - zz - qaa}}$.

CCII.

D'où il suit qu'en général $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz - zz - gg}}$ dépend de la rectification d'une ellipse dont g est un des demi-axes, & dont l'autre demi-axe que je nomme r doit être tel

Différentielle qui en dépend immédiatement.

que $fr - rr = gg$. En effet, en comparant les deux dernieres différentielles entre elles terme à terme, on a $qaa = gg$; $qa + a = f$, ou $qaa = fa - aa$; donc $fa - aa = gg$, ou à cauſe que a (hyp.) $= r$, $gg = fr - rr$, le ſecond axe eſt donc $\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$. Car ſi on multiplie cette quantité par f, & ſi on lui ajoute ſon quarré, on trouvera gg après avoir effacé les termes qui ſe détruiſent. Il ſuit auſſi de là que les abſciſſes x priſes depuis le centre doivent être telles que $rz = rr + \frac{gg}{rr} - 1 \cdot xx$: car nous avons plus haut $aa + (q-1)xx = az$: or $a = r$, $aa = rr$, $qaa = gg$; donc $q = \frac{gg}{aa} = \frac{gg}{rr}$, donc &c.

CCIII.

REMARQUE 1. Si ff étoit $< 4gg$, la valeur de r ſeroit imaginaire, par conſéquent l'ellipſe le ſeroit auſſi. Mais alors la différentielle propoſée ſeroit imaginaire & ſans intégrale ; ce qui eſt évident, puiſque dans ce cas $\sqrt{fz - zz - gg}$ ſeroit imaginaire, cette quantité étant la même que celle-ci $\sqrt{\frac{ff}{4} - gg - \left\{\frac{f}{2} - z\right\}^2}$.

CCIV.

REMARQUE 2. Il eſt clair que $\frac{ff}{4} - gg = \frac{ff}{4} - fr + rr = \left\{\frac{f}{2} - r\right\}^2$. Or comme par la remarque précédente $\sqrt{\frac{ff}{4} - gg - \left\{\frac{f}{2} - z\right\}^2}$ doit toujours être réelle, il s'enſuit que $\sqrt{\left\{\frac{f}{2} - r\right\}^2 - \left\{\frac{f}{2} - z\right\}^2}$

ou

ou $\sqrt{\left\{r-\frac{f}{2}\right\}^2-\left\{z-\frac{f}{2}\right\}^2}$, ſelon que r & z ſont $<$ ou $>\frac{f}{2}$, doit être auſſi réel : mais ſuivant ce qui eſt dit ci-deſſus, $fr-rr=gg$ ou $\frac{fr}{2}-\frac{rr}{2}=\frac{gg}{2}$, ou $\frac{f}{2}-\frac{r}{2}=\frac{gg}{2r}$, ou $\frac{f}{2}=\frac{gg}{2r}+\frac{r}{2}$. Donc ſi $r<\frac{f}{2}$, on a $r<\frac{gg}{2r}+\frac{r}{2}$, ce qui donne $rr<gg$ & $\frac{gg}{rr}>1$; $\frac{gg}{rr}-1$ eſt donc une quantité poſitive. Dans ce cas l'équation $rz=rr+\left\{\frac{gg}{rr}-1\right\}xx$ peut ſe changer en $rz=rr+hxx$, ou $z=r+\frac{hxx}{r}$, d'où il ſuit que $z>r$ ce qui eſt d'ailleurs évident, puiſque dans ce cas on a $\sqrt{\left\{\frac{f}{2}-r\right\}^2-\left\{\frac{f}{2}-z\right\}^2}$. La valeur $\frac{rz-rr}{h}$ de xx ſera donc poſitive, donc x ſera réelle. Si $r>\frac{f}{2}$, on aura $r>\frac{gg}{2r}+\frac{r}{2}$, ce qui donnera $rr>gg$ & $\frac{gg}{rr}<1$; donc $\frac{gg}{rr}-1$ ſera une quantité négative : on aura donc $rz=rr-hxx$, ou $z=r-\frac{hxx}{r}$, donc $z<r$, ce qui ſuit encore de ce qu'alors on a $\sqrt{\left\{r-\frac{f}{2}\right\}^2-\left\{z-\frac{f}{2}\right\}^2}$. La valeur $\frac{rz-rr}{-h}$, ou $\frac{rr-rz}{h}$ de xx ſera donc encore poſitive, la valeur de x par conſéquent ſera encore réelle.

CCV.

REMARQUE 3. Nous avons vu (Art. CCII.) que la valeur du ſecond axe r de l'ellipſe étoit $\frac{f}{2}\pm\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}$. On peut donc prendre pour r l'une ou l'autre des deux valeurs $\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}$ ou $\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}$. Mais cela ne réduit-il pas la différentielle propoſée à la rectification de deux ellipſes différentes ? D'abord on ſeroit

tenté de le croire, & par ce moyen on trouveroit un arc d'ellipſe égal à un autre arc d'ellipſe. Ce qui rend encore la choſe plus vraiſemblable, c'eſt que ces ellipſes ont un axe commun g. Mais en y faiſant attention on reconnoîtra que ces deux ellipſes ſont ſemblables, g eſt le grand axe de l'une, & le petit axe de l'autre. Et en effet l'équation $gg = \left\{\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}\right\} \times \left\{\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}\right\}$ donne cette proportion $\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} - gg} : g :: g : \frac{f}{2} - \sqrt{\frac{ff}{4} - gg}$; donc &c.

CCVI.

Figure 7.

2°. Elément de la rectification d'une hyperbole dont le premier axe eſt $2a$, & le parametre p.

LEMME 2. Soit une hyperbole dont le grand axe $2KA = 2a$, le parametre $= p$, les abſciſſes x étant priſes depuis le centre. Soit l'équation de cette hyperbole $\frac{2a}{p}yy = xx - aa$, ou $2ayy = pxx - aap$. Différentiant cette équation, il vient $4aydy = 2pxdx$, d'où l'on tire $dy = \frac{p}{2ay}xdx$, & $dy^2 = \frac{ppxxdx^2}{4aayy} = \frac{ppxxdx^2}{2apxx - 2a^3p} = \frac{pxxdx^2}{2axx - 2a^3}$: ſubſtituant cette valeur de dy^2 dans la formule de l'Article XCI. $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on a $\sqrt{dx^2 + \frac{pxxdx^2}{2axx - 2a^3}}$, ou $dx\frac{\sqrt{2axx + pxx - 2a^3}}{\sqrt{(2axx - 2a^3)}}$, ou enfin $dx\sqrt{\frac{(p+1)}{2a}xx - a^2}$ pour l'élément d'une hyperbole dont $2a$ eſt le premier axe, & p le parametre de cet axe.

Faiſant comme plus haut $\frac{p}{2a} = q$, & $(q+1) \times xx - aa = az$, on changera par les mêmes opérations que celles qui ont été faites pour l'ellipſe, la différentielle propoſée en celle-ci $\frac{dz\sqrt{az}}{2\sqrt{(zz + \overline{a-qa} \times z - qaa)}}$.

Différentielle qui en dépend immédiatement.

On trouvera de même que $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(zz - gg \pm fz)}}$ dépend de la rectification d'une hyperbole dont le ſecond axe $= 2g$, & dont le premier axe $2r$ doit être tel que $rr - gg = \pm fr$. Les deux demi-axes ſont donc g, & $r = \pm \frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + gg}$. Les abſciſſes x priſes depuis le centre, à cauſe de $q = \frac{gg}{rr}$, ſont égales à $\pm \frac{\sqrt{(aa+az)}}{\sqrt{(\frac{gg}{rr}+1)}}$.

CCVII.

Elément de l'hyperbole par rapport à ſon ſecond axe.

REMARQUE. Si on prend l'hyperbole par rapport à ſon ſecond axe DKd, nommant ce ſecond axe $2b$, le parametre de cet axe π, l'abſciſſe priſe ſur le ſecond axe x, l'ordonnée parallele au premier axe y, l'équation de l'hyperbole par rapport à ce ſecond axe ſera $\frac{2b}{\pi} yy = xx + bb$; & en faiſant les mêmes opérations que pour le premier axe, on trouvera $du = dx \frac{\sqrt{\{\frac{\pi}{2b}+1\} xx + bb}}{\sqrt{xx+bb}}$: faiſant $\frac{\pi}{2b} = q$, & $(q+1) \times xx + bb = bz$, on trouvera la même transformée que ci-deſſus ; on n'auroit donc par ce moyen aucune nouvelle différentielle réductible à la rectification de l'hyperbole.

Donne la même différentielle que la précédente.

CCVIII.

Différentielle qui dépend de la rectification de l'hyperbole équilatere.

COROLLAIRE. Si la différentielle propoſée étoit $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-gg}}$, en comparant cette différentielle avec $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz-gg\pm fz}}$ on voit que $f=0$, on aura donc $rr-gg=0$ ou $rr=gg$, c'eſt-à-dire que les deux axes ſont égaux; la propoſée ſe rapporte donc à la rectification d'une hyperbole dont $2g$ eſt l'axe.

CCIX.

Autre différentielle qui ſe ramene à la rectification de l'hyperbole.

Pour trouver l'intégrale de $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{bb\pm fz-zz}}$,

Je fais $z=\frac{bb}{u}$, ce qui donne $dz=-\frac{bbdu}{uu}$; $\sqrt{z}=\sqrt{\frac{bb}{u}}$, ou $\frac{b}{\sqrt{u}}$; $zz=\frac{b^4}{uu}$. Mettant à la place de z, dz, zz leurs valeurs en u, on a $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{bb\pm fz-zz}}=\frac{-\frac{bbdu}{uu}\times\frac{b}{\sqrt{u}}}{\sqrt{bb+\frac{fbb}{u}-\frac{b^4}{uu}}}=\frac{-\frac{bbdu}{uu}\times\frac{b}{\sqrt{u}}}{\frac{b}{u}\sqrt{uu\pm fu-bb}}=$ enfin $\frac{-bbdu}{u\sqrt{u}.\sqrt{uu\pm fu-bb}}$. Cette différentielle eſt la même que la ſuivante $\frac{-u^2du-bbdu}{u\sqrt{u}.\sqrt{uu\pm fu-bb}}+\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu\pm fu-bb}}$. La premiere partie de cette différentielle s'integre ſans peine. Car on a $\frac{-u^2du-bbdu}{u\sqrt{u}.\sqrt{uu\pm fu-bb}}=\frac{-u^2du-bbdu}{u^2\sqrt{uu+fu-bb}}$ $=\frac{-du-\frac{bbdu}{u^2}}{\sqrt{uu+fu-bb}}=\frac{-du-\frac{bbdu}{uu}}{\sqrt{u\pm f-\frac{bb}{u}}}$, dont il eſt aiſé de

trouver l'intégrale. Car faiſant $u \pm f - \frac{bb}{u} = z$, on a $du + \frac{bb\,du}{uu} = dz$; donc il vient $-\frac{dz}{\sqrt{z}}$ dont l'intégrale eſt $-2\sqrt{z}$; donc en remettant pour z & dz leurs valeurs, l'intégrale eſt $-\frac{2\sqrt{uu \pm fu - bb}}{\sqrt{u}}$. L'intégrale entiere cherchée eſt donc $-\frac{2\sqrt{uu \pm fu - bb}}{\sqrt{u}} + \int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{uu \pm fu - bb}}$. Or ce dernier membre qui eſt ſous le ſigne $\int$ eſt réductible (Art. CCVI.) à la rectification d'une hyperbole dont les deux demi-axes ſont b, & $\pm\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{ff}{4} + bb}$. Donc la différentielle propoſée eſt réductible à la rectification de l'hyperbole.

CHAPITRE XV.

Des différentielles dont l'intégration dépend à la fois de la rectification de l'ellipſe & de celle de l'hyperbole.

CCX.

PROBLEME I. INtégrer $\frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{b^2 \pm fz - zz}}$.

Premier exemple de ces différentielles.

SOLUTION. $b^2 \pm fz - zz$ (les ſignes de bb & de zz étant différens) a deux racines réelles, l'une poſitive & l'autre négative. Je les repréſente par $a - z$, $m + z$; la propoſée devient donc $\frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{(a-z).(m+z)}}$

$$= \frac{dz}{m\sqrt{z}} \times \left\{ \frac{m+z}{\sqrt{(a-z)\times(m+z)}} - \frac{z}{\sqrt{(a-z)\times(m+z)}} \right\} =$$

en faiſant les réductions ordinaires $\frac{dz\sqrt{m+z}}{m\sqrt{z}\cdot\sqrt{a-z}} - \frac{dz\sqrt{z}}{m\sqrt{(a-z)\times(m+z)}} = \frac{dz\sqrt{m+z}}{m\sqrt{z}\cdot\sqrt{a-z}} - \frac{dz\sqrt{z}}{m\sqrt{bb\pm fz-zz}}$.

Or le ſecond membre de cette différentielle s'integre (Art. CCIX.) par la rectification d'une hyperbole dont les deux demi-axes ſont b & $\pm\frac{f}{2}+A$ en ſuppoſant $\frac{f^2}{4}+bb=AA$, & par conſéquent $\sqrt{\frac{f^2}{4}+bb}=A$. Pour intégrer à préſent le premier membre de la différentielle transformée, je fais $m+z=x$ ce qui donne 1°. $\sqrt{z}=\sqrt{x-m}$, 2°. $dz=dx$, 3°. $\sqrt{a-z}=\sqrt{m+a-x}$. Subſtituant toutes ces valeurs on a $\frac{dx\sqrt{x}}{m\sqrt{x-m}\cdot\sqrt{m+a-x}} = \frac{dx\sqrt{x}}{m\sqrt{mx+ax-xx-mm-am+mx}} = \frac{dx\sqrt{x}}{m\sqrt{(a+2m)x-xx-m(a+m)}}$.

Cette différentielle ſe rapporte à la rectification de l'ellipſe (Art. CCII.) : la comparant terme à terme avec la différentielle de l'Article CCII. $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{fz-zz-gg}}$, on a $m\times\overline{a+m}=gg$; $a+2m=f$; les deux demi-axes trouvés g, & $\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}-gg}$ deviennent donc $\sqrt{m(a+m)}$ & $\frac{a+2m}{2}+\sqrt{\frac{aa+4am+4mm-am-mm}{4}}$, c'eſt-à-dire, $\sqrt{m(a+m)}$ & $a+m$. Pour trouver à préſent ceux de l'ellipſe en queſtion ici, il faut chercher les valeurs de a, & de m. Pour cela j'ai d'abord l'équation ſuivante $\sqrt{bb\pm fz-zz}=\sqrt{(a-z)(m+z)}$; ce qui donne par la comparaiſon terme à terme $am=bb$

& $a-m=\pm f$. Nous avons encore supposé $\frac{ff}{4}+bb=AA$, donc $\frac{ff}{4}=AA-bb=AA-am=AA-aa\pm fa$, ce qui donne $\pm\frac{f}{2}+A=a$. Mettant cette valeur de a dans $a-m=f$, on aura $\pm\frac{f}{2}+A-f=m$ ou $m=\mp\frac{f}{2}+A$; donc $a+m=\pm\frac{f}{2}+A\mp\frac{f}{2}+A=2A$, & $\sqrt{m\times a+m}=\sqrt{2A.\left\{A\mp\frac{f}{2}\right\}}$ qui sont les deux demi-axes de l'ellipse cherchée.

CCXI.

Corollaire. Si l'on a $\frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{zz-ez\pm fz}}$, il faut essayer si par des transformations on ne peut pas ramener cette différentielle à quelqu'un des cas précédens. Pour y parvenir, je fais $z=\frac{bb}{u}$; ce qui donne en faisant les mêmes calculs que nous avons déja faits (Art. CCIX.) la transformée $\frac{-du}{\sqrt{u}.\sqrt{bb\pm fu-uu}}$ qu'on voit évidemment s'intégrer par le Problème précédent, & dépendre de la rectification des mêmes ellipse & hyperbole. Les demi-axes de l'hyperbole sont b & $\pm\frac{f}{2}+A$, ceux de l'ellipse sont $\sqrt{2AA-Af}$ & $2A$. On suppose toujours $A=\sqrt{\left\{\frac{ff}{4}+bb\right\}}$.

CCXII.

Réflexion sur le fréquent usage des transformations enseignées au commencement de ce Traité.

Remarque. Il est bon de faire observer ici de quel usage fréquent sont les transformations que nous avons enseignées dans le commencement de ce Traité. Elles sont, pour ainsi dire, la clef de tout ce Calcul, du moins

le facilitent-elles extrêmement. On voit auſſi par les exemples que nous avons donnés juſqu'ici comment on ramene les différentielles dont on cherche l'intégration à d'autres différentielles dont l'intégrale nous eſt connue. Nous en allons encore donner des exemples.

CCXIII.

Autres différentielles qui ſont dans le cas des précédentes.

PROBLEME 2. Trouver l'intégrale de $\frac{dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{zz+bb\pm fz}}$.

SOLUTION. Ce Problême a deux cas, le premier lorſque le trinome $zz+bb\pm fz$ a ſes racines réelles, le ſecond lorſqu'il a ſes racines imaginaires. Examinons ces deux cas ſéparément.

PREMIER CAS.

Lorſque $zz+bb\pm fz$ a ſes racines réelles, je les repréſente par $z+m$, & $z+n$, quand il y a $+fz$; & par $z-m$, $z-n$, quand il y a $-fz$. Je ſuppoſe $n>m$, ſuppoſition que je puis toujours faire. J'ai donc $\frac{dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{(zz\pm fz+bb)}}=\frac{dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{(z\pm m)\cdot(z\pm n)}}$. Soit $z\pm m=u$; on a $dz=du$; $\sqrt{z}=\sqrt{u\mp m}$, & $\sqrt{z\pm n}=\sqrt{u\mp m\pm n}$. La propoſée ſe change donc en $\frac{du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{(u\mp m)\times(u\mp m\pm n)}}=\frac{du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{uu\mp 2um\pm un+mm-mn}}$. Mais comme (hyp.) $n>m$, la transformée peut être repréſentée par $\frac{du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{uu\pm ku-qq}}$. Elle s'intégrera donc (Article CCXII.) par la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole

l'hyperbole à la fois. Comparant cette derniere différentielle avec celle de l'Article que nous venons de citer, on trouve que les demi-axes de l'hyperbole ſont ici q, & $\pm\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+qq}$, & que les demi-axes de l'ellipſe ſont $2\sqrt{\frac{kk}{4}+qq}$ & $\sqrt{2\left\{\frac{kk}{4}+qq\right\}\mp k\sqrt{\frac{kk}{4}+qq}}$

$$=\sqrt{2.\sqrt{(\tfrac{kk}{4}+qq)}\times\sqrt{(\tfrac{kk}{4}+qq)}\mp k\sqrt{(\tfrac{kk}{4}+qq)}}$$

$$=\sqrt{2\sqrt{\tfrac{kk}{4}+qq}\times\sqrt{\mp\tfrac{k}{2}+\sqrt{\tfrac{kk}{4}+qq}}}.$$

Comparant à préſent $\frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{zz\pm fz+bb}}$ avec la transformée $\frac{dz}{\sqrt{z}.\sqrt{zz\pm nz\pm mz+mn}}$, on trouve 1°. dans le cas de $+fz$

$$mn=bb$$
$$m+n=f$$
donc $$n=\frac{bb}{m}$$
& $m+n=f$ devient $mm+bb=fm$
ou bien $$mm-fm+\frac{ff}{4}=\frac{ff}{4}-bb$$
ou $$m=\frac{f}{2}\pm\sqrt{\frac{ff}{4}-bb},$$
& par conſéquent $$n=\frac{f}{2}\mp\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}$$
donc à cauſe de $m<n$ on a $$m=\frac{f}{2}-\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}$$
& $$n=\frac{f}{2}+\sqrt{\frac{ff}{4}-bb}$$
donc en ſuppoſant $\frac{ff}{4}-bb=AA$, on a $m=\frac{f}{2}-A$

$$n=\frac{f}{2}+A.$$

Comparant maintenant la transformée $\frac{du}{\sqrt{u}.\sqrt{uu\mp 2um\pm un+mm-mn}}$

avec $\frac{du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{uu \pm ku - qq}}$, on trouve dans le même cas

de $+fz$ . . . . . $-2m+n=k$

donc . . . . . $\frac{k}{2}=-m+\frac{n}{2}$

cette comparaiſon donne auſſi $-mm+mn=qq$

donc . . . . . $q=\sqrt{-mm+mn}$,

& en mettant pour m & n leurs valeurs trouvées ci-deſſus, il nous viendra . . . $q=\sqrt{fA-2AA}$:

on a auſſi $\frac{nn}{4}-mn+m^2+q^2=\frac{k^2}{4}+q^2$

ou bien . . . . $\frac{nn}{4}-q^2+q^2=\frac{kk}{4}+qq$,

donc . . . . . $\frac{n}{2}=\sqrt{\frac{kk}{4}+qq}$.

Les demi-axes trouvés de l'hyperbole q & $\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{kk}{4}+qq}$

ſont donc . . . . . $q=\sqrt{fA-2AA}$

& . . . . . $-m+n=2A$.

Les demi-axes de l'ellipſe ſont $n=\frac{f}{2}+A$

& $\sqrt{\frac{f}{2}+A}\times\sqrt{m-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}=\sqrt{\frac{f}{2}+A}\times\sqrt{\frac{f}{2}-A}=b$.

2°. Dans le cas de $-fz$, faiſant les mêmes calculs que ci-deſſus, on trouve . . . . . $mn=bb$

$$m+n=f$$

$$2m-n=-k$$

$$mm-nm=-qq,$$

donc . . . . . $q=\sqrt{fA-2AA}$

& . . . . . $\sqrt{\frac{kk}{4}+qq}=\frac{n}{2}$.

Les demi-axes de l'hyperbole ſont donc

$$q = \sqrt{fA - 2AA}$$

& . . . . . $m = \frac{f}{2} - A$:

ceux de l'ellipſe ſont . . . . $n = \frac{f}{2} + A$

& $\sqrt{n} \times \sqrt{\left\{-m + \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\right\}} = \sqrt{nn - mn} =$

$\sqrt{\left\{\frac{ff}{4} + fA + AA - \frac{ff}{4} + AA\right\}} = \sqrt{(2AA + fA)}$.

Si dans le cas de $-fz$, au lieu de ſuppoſer que les racines ſont $z - m$, & $z - n$, on les ſuppoſe $m - z$, & $n - z$, comme on le doit faire lorſque $z < m$ & $< n$ (n étant toujours ſuppoſé $> m$) on fera dans ce cas $m - z = t$, & après les réductions & transformations ordinaires on aura $\frac{-dt}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{(m-t) \cdot (n-m+t)}}$, qui ſe rapporte à la différentielle du Problême 1. Art. CCX.

Pratiquant ici les mêmes calculs que nous avons faits plus haut, on trouve . . . . . $mn = bb$

$$m + n = f$$
$$m(n - m) = qq$$
$$2m - n = \pm k.$$

Ces équations donnent un réſultat qui eſt le même que le précédent. Je paſſe au cas où les racines ſont imaginaires.

SECOND CAS.

Si $zz \pm fz + bb$ a ſes racines imaginaires, je commence par faire évanouir le ſecond terme, en faiſant

$$z \pm \frac{f}{2} = u$$

ou . . . . . $z = u \mp \frac{f}{2}$,

EXTRAIT DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences,

Du 14 Janvier 1756.

NOUS Commiſſaires nommés par l'Académie, avons examiné la ſeconde Partie de l'Ouvrage de Monſieur de Bougainville le jeune, qui a pour titre : *Traité du Calcul intégral.*

Cette ſeconde Partie traite de l'Intégration des Quantités différentielles à deux ou pluſieurs variables, & acquitte par conſéquent l'engagement que l'Auteur avoit pris avec le public. Elle eſt diviſée en deux livres.

Le premier a pour objet l'intégration des Différentielles du premier ordre, qui contiennent deux ou pluſieurs variables. M. de Bougainville après quelques Définitions & Propoſitions préliminaires, traite d'abord de l'intégration des quantités ou équations différentielles qui n'ont beſoin pour cela d'aucune préparation ; il donne le moyen de connoître & de diſtinguer ces ſortes de quantités ou équations, & de les intégrer. Il paſſe enſuite à l'intégration des équations qui ont beſoin d'être préparées par quelque opération particuliere ; & comme pour l'ordinaire, cette opération conſiſte à ſéparer les Indéterminées, M. de Bougainville, après avoir enſeigné à conſtruire une Equation différentielle dont les indéterminées ſont ſéparées, donne différentes méthodes pour ſéparer les indéterminées dans une Equation propoſée, ſoit par la voie des multiplications & des diviſions, ſoit par celle des transformations. Le premier uſage qu'il en fait, a pour objet les Equations homogenes, & après avoir montré comment on peut conſtruire ces équations dans tous les cas, il

& en supposant $\sqrt{uu+AA}-u=t$, la transformée sera $\frac{dt\sqrt{2}}{\sqrt{t}\,.\,\sqrt{tt-AA+ft}}$, qui s'integre de la même maniere que la précédente.

Pour ce qui regarde les demi-axes de l'ellipse & de l'hyperbole dans ce cas, nous ne nous arrêterons pas à détailler tous les calculs nécessaires pour les trouver, le lecteur doit être suffisamment exercé à les faire lui-même. En supposant, comme nous l'avons dit, $\frac{ff}{4}-bb=-AA$, il trouvera que les deux demi-axes de l'hyperbole sont A & $\mp\frac{f}{2}+b$, & ceux de l'ellipse $2b$, & $\sqrt{2b\times(\pm\frac{f}{2}+b)}$ $=\sqrt{2bb\pm bf}$. . . . . .

CCXIV.

PROBLEME 3. Trouver l'intégrale de $\frac{dz}{\sqrt{z}\,.\,\sqrt{(fz+bb-zz)}}$. Troisieme exemple.

SOLUTION. La quantité $\sqrt{fz-bb-zz}$ peut avoir cette autre forme $\sqrt{\frac{ff}{4}-bb-\left\{\frac{f}{2}-z\right\}^2}$. En la considérant sous cette forme, on remarquera que si $\frac{ff}{4}$ est $<bb$, la différentielle proposée est imaginaire, & par conséquent sans intégrale; donc pour que le Problême soit possible, il faut que $fz-bb-zz$ ait ses racines réelles. Je les suppose $a-z$ & $z-c$, la proposée sera $\frac{dz}{\sqrt{z}\,.\,\sqrt{(a-z)\times(z-c)}}=\frac{dz}{\sqrt{z}\,.\,\sqrt{az+cz-zz-ac}}$. Je fais $a-z=u$, donc $dz=-du$, &c; après les opérations ordinaires on trouve la transformée

$$\frac{-du}{\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a-u}\,.\,\sqrt{a-u-c}}=\frac{-du}{\sqrt{a}\,.\,\sqrt{aa-ac-2au+cu+uu}},$$

mais a doit toujours être ſuppoſé $> c$, car $a-z$ & $z-c$ doivent toujours être poſitifs ; ſi l'un des deux étoit négatif, la différentielle ſeroit imaginaire, ce qui eſt contre l'hypotheſe. S'ils ſont tous deux négatifs, il les faut changer en $z-a$, & $c-z$ qui ne différent de $a-z$ & de $z-c$ que par le changement des ſignes ; donc $a > z$ & $z > c$, donc $a > c$; la propoſée peut donc être ſuppoſée égale à $\frac{-du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{gg \pm ku + uu}}$ qui s'integre par le Problême 2.

Pour trouver les demi-axes de l'ellipſe & de l'hyperbole, j'ai d'abord en comparant les deux premieres différentielles . . . . . $a + c = f$

$$ac = bb.$$

Je compare enſuite les deux dernieres, cette comparaiſon me donne . . . . . $aa - ac = gg$

$$2z - c = -k$$

$$aa - ac + \frac{cc}{4} = \frac{kk}{4}$$

donc . . . . . $\frac{kk}{4} > gg$,

donc les racines ſont réelles. De plus $a > c$ donne $2a > c$, & k poſitif. Comparant maintenant notre transformée $\frac{-du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{(uu-ku+gg)}}$ avec $\frac{dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{(zz-fz+bb)}}$ dont les demi-axes ont été trouvés (Art. CCXIII. n°. 2.), $zz - fz + bb$ ayant ſes racines réelles ; faiſant $A' = \sqrt{\frac{kk}{4} - gg}$, on trouvera que les demi-axes de l'hyperbole ſont $\sqrt{kA' - 2A'A'}$ & $\frac{k}{2} - A'$, & que ceux de l'ellipſe ſont $\sqrt{2A'A' + A'k}$, & $A' + \frac{k}{2}$: or $k = 2a - c$, $gg = aa - ac$, $a + c = f$, & $ac = bb$. Subſtituant

donc pour A' & k leurs valeurs en b & en f, & faiſant $\sqrt{\frac{bb}{4} - ff} = A$, on trouve que les demi-axes de l'hyperbole ſont $2A$ & $\sqrt{fA - 2AA}$, & ceux de l'ellipſe ſont b, & $\frac{f}{2} + A$.

CCXV.

PROBLEME 5. Trouver l'intégrale de $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz + bb \pm fz}}$. Quatrieme exemple.

SOLUTION. Le dénominateur a ſes deux racines réelles, ou il les a imaginaires.

PREMIER CAS.

Lorſque $zz + bb \pm fz$ a ſes deux racines réelles, elles ſeront $z + a$, & $z + c$ dans le cas de $+fz$, & $z - a$, $z - c$ dans le cas de $-fz$. A préſent il eſt évident que $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz + bb}} = \frac{2dz}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{zz \pm az \pm cz + ac}}$. Je fais $z \pm a = y$, en ſuppoſant $c > a$, on a $z = y \mp a$; $dz = dy$; $z \pm c = y \mp a \pm c$. Subſtituant ces valeurs de z on aura $\frac{2dz}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{z \pm a} \cdot \sqrt{z \pm c}} = \frac{\sqrt{y \mp a} \cdot dy}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{(y \mp a) \cdot (y \mp a \pm c)}} = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(y \mp a) \cdot (y \mp a \pm c)}} \mp \frac{a\,dy}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{(y \mp a) \cdot (y \mp a \pm c)}}$. Or comme par la ſuppoſition $c > a$, on voit clairement que ces deux différentielles peuvent ſe repréſenter par les deux ſuivantes $\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{yy \pm ny - mm}}$ & $\frac{dy}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{yy \pm ny - mm}}$, la premiere deſquelles ſe rapporte à l'Article CCVI., & la ſeconde au Corollaire du Problême 1. Art. CCXI.

TRAITÉ

CCXVII.

SECOND CAS.

Lorſque $zz \mp fz + bb$ a ſes deux racines imaginaires, on fait d'abord évanouir le ſecond terme en faiſant $z \mp \frac{f}{2} = u$, ce qui donne $dz = du$, $\sqrt{z} = \sqrt{u \mp \frac{f}{2}}$; $zz = uu \mp fu + \frac{ff}{4}$; on aura donc la transformée $\frac{du\sqrt{u \mp \frac{f}{2}}}{\sqrt{uu + bb - \frac{ff}{4}}}$: & en faiſant $bb - \frac{ff}{4} = AA$, il vient $\frac{du\sqrt{u \mp \frac{f}{2}}}{\sqrt{uu + AA}} = \frac{udu \mp \frac{f}{2}du}{\sqrt{u \mp \frac{f}{2}} \cdot \sqrt{uu + AA}}$, comme il eſt évident en multipliant haut & bas par $\sqrt{u \mp \frac{f}{2}}$, ce qui ne change rien à la valeur.

Soit à préſent $u + \sqrt{uu + AA} = y$; donc $uu - 2uy + yy = uu + AA$, donc $u = \frac{yy - AA}{2y}$

& . . . . . $du = \frac{dy}{2yy} \times yy + AA$,

on a auſſi . . . . $\sqrt{uu + AA} = \frac{yy + AA}{2y}$.

& de même . . . . $\sqrt{u \mp \frac{f}{2}} = \frac{\sqrt{yy - AA \mp fy}}{\sqrt{2y}}$.

La premiere partie $\frac{udu}{\sqrt{u \mp \frac{f}{2}} \cdot \sqrt{uu + AA}}$ de la propoſée devient donc $\frac{\frac{dy}{4y^3} \times \sqrt{y^4 - A^4}}{\frac{\sqrt{yy - AA \mp fy}}{\sqrt{2y}} \times \frac{yy + AA}{2y}} =$

$$= \frac{\frac{dy}{2y^2} \times \sqrt{yy - AA} \times \frac{\sqrt{yy+AA}}{2y}}{\frac{\sqrt{yy - AA \mp fy}}{\sqrt{2y}} \times \frac{\sqrt{yy+AA}}{2y}} = \frac{\frac{dy}{2yy} \times \sqrt{yy - AA}}{\frac{\sqrt{yy - AA \mp fy}}{\sqrt{2y}}}$$

$$= \frac{dy\sqrt{2}.\sqrt{y}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{yy - AA \mp fy}} - \frac{AAdy\sqrt{2}.\sqrt{y}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{y}.y\sqrt{y}.\sqrt{y^2 - A^2 \mp fy}}$$

$$= \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2}.\sqrt{yy - AA \mp fy}} - \frac{AAdy}{\sqrt{2}.y\sqrt{y}.\sqrt{yy - AA \mp fy}}.$$ La seconde partie $\frac{\mp \frac{f}{2} du}{\sqrt{u \mp \frac{f}{2}}.\sqrt{uu + AA}} =$ de même

$$\frac{\mp \frac{fdy}{4yy} \times \sqrt{yy + AA}}{\frac{\sqrt{yy - AA \mp fy}}{\sqrt{2y}} \times \frac{\sqrt{yy+AA}}{2y}} = \frac{\mp \frac{fdy}{2y}}{\frac{\sqrt{yy - AA \mp fy}}{\sqrt{2y}}} =$$ enfin

$\frac{\mp fdy}{\sqrt{2}.\sqrt{y}.\sqrt{yy - AA \mp fy}}$. La transformée entiere eſt donc

$$\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2}.\sqrt{yy - AA \mp fy}} - \frac{AAdy}{\sqrt{2}.y\sqrt{y}.\sqrt{yy - AA \mp fy}} \mp \frac{fdy}{\sqrt{2}.\sqrt{y}.\sqrt{yy - AA \mp fy}}$$

dont la premiere partie s'integre par l'article CCVI., la ſeconde par l'article CCIX., & la troiſieme par l'art. CCXI.

Si quand on a $zz - fz + bb$, z eſt $< \frac{f}{2}$, enſorte qu'il faille ſuppoſer $\frac{f}{2} - z = u$, alors en pratiquant ce qui a déja été fait (Problême 2.) dans un cas ſemblable, on aura (en faiſant $\sqrt{uu + AA} - u = t$) la transformée ſuivante $\frac{dt\sqrt{t}}{\sqrt{2}.\sqrt{tt - At + ft}} - \frac{AAdt}{\sqrt{2}.t\sqrt{t}.\sqrt{tt - At + ft}}$ $- \frac{fdt}{\sqrt{2t}.\sqrt{tt - At + ft}}$ dont les trois parties s'integrent de la même maniere que les trois ci-deſſus.

Dans le cas préſent des racines imaginaires, l'intégration de $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{zz \pm fz + bb}}$ dépend des mêmes ellipſe & hyperbole

que $\frac{dz}{\sqrt{z} \cdot \sqrt{zz+fz+bb}}$ en faisant les mêmes suppositions.

CCXVIII.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. On doit conclure de tout ce que nous venons de dire pour résoudre les Problêmes précédens que l'intégration de la différentielle $\frac{z^{\pm\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{a\pm bz\pm czz}}$ dépend toujours de la rectification d'une ou de plusieurs sections coniques.

CHAPITRE XVI.

Suite des Chapitres précédens sur les différentielles dont l'intégration dépend de la rectification des sections coniques.

CCXIX.

SOit cherchée d'abord l'intégrale de $\frac{x^{\pm\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$, Application aux exemples les plus généraux. n étant un nombre entier impair, & a, b, c, des coefficiens quelconques.

Pour résoudre ce Problême 1°. prenons la différence de Premier exemple. $x^p \times \sqrt{a+bx+cxx}$, elle sera

$$px^{p-1}dx \times (a+bx+cxx)^{\frac{1}{2}} + x^p \times \frac{\frac{b}{2}dx+cxdx}{\sqrt{a+bx+cxx}} =$$

$$\frac{px^{p-1}dx \times (a+bx+cxx) + x^p \cdot \left\{\frac{b}{2}dx+cxdx\right\}}{\sqrt{a+bx+cxx}} =$$

$$\frac{px^{p-1}\,adx+\left(\frac{b}{2}+bp\right)x^{p}\,dx+(c+cp)\,x^{p+1}\,dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$$

On voit par cette différentielle que l'intégrale de $\frac{px^{p-1}\,adx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ eſt égale à celle de $x^{p}\sqrt{a+bx+cx^{2}}$ $-\int\frac{\left(\frac{b}{2}+bp\right)x^{p}\,dx+(c+cp)\,x^{p+1}\,dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$, c'eſt-à-dire moins l'intégrale de $\frac{\left(\frac{b}{2}+bp\right)x^{p}\,dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$, & de $\frac{(c+cp)\,x^{p+1}\,dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$; elle dépend donc de ces deux dernieres. Donc en général l'intégration de $\frac{x^{-q-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ dépend de celle de $\frac{x^{-q+\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$, & de celle de $\frac{x^{-q+\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$, tant que q n'eſt pas $=1$; car ſi $q=1$, $p-1=-\frac{3}{2}$ & $p=-\frac{1}{2}$, & $\frac{b}{2}+bp=0$.

Donc en donnant ſucceſſivement différentes valeurs à q, on trouvera que toutes les différentielles $\frac{dx}{x^{q}\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{a+bx+cxx}}$, q étant un nombre entier poſitif, s'intégreront auſſi-tôt qu'on connoîtra l'intégrale des différentielles $\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{a+bx+cxx}}$ & $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ que nous avons appris à trouver dans les deux Chapitres précédens.

CCXX.

On remarquera que l'intégrale de $\frac{dx}{x\sqrt{x}\cdot\sqrt{a+bx+cxx}}$ ne dépend que de $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cxx}}$; car alors $q=+1$,

& par conſéquent $\frac{b}{2} + bp = 0$, donc la premiere différentielle s'évanouit. Ainſi il ne reſte que la ſeconde à laquelle répond $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cxx}}$. On prouvera auſſi que $\frac{x^{q+\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ dépend de $\frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ & de $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$. Car comme nous avons vu (Art. précédent) $\frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ dépend de $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ & de $\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$: de même $\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ dépend de $\frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$, & de $\frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ &c. donc réciproquement.

CCXXI.

On peut encore s'en aſſurer d'une autre maniere en faiſant $x = u^{-1}$; $dx = -\frac{du}{uu}$, ce qui donnera la transformée ſuivante $-\frac{du \times u^{-q-\frac{3}{2}}}{\sqrt{m+nu+quu}}$, qui dépend, comme nous venons de le voir, de $\frac{u^{-\frac{3}{2}}du}{\sqrt{m+nu+quu}}$ & de $\frac{u^{-\frac{1}{2}}du}{\sqrt{m+nu+quu}}$, c'eſt-à-dire, de $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ & de $\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{a+bx+cxx}}$.

CCXXII.

Différentielles qui dépendent de la précédente.

COROLLAIRE 1. Il ſuit de là que l'intégration de $x^{\pm\frac{n}{2}}dx \cdot \overline{a+bx+cxx}^{\frac{p}{2}}$ p étant un nombre entier poſitif, dépend encore de $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ & $\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{a+bx+cxx}}$. En effet ſi on multiplie la propoſée par $\frac{\sqrt{a+bx+cxx}}{\sqrt{a+bx+cxx}}$, elle deviendra compoſée de différentes parties de la forme de $\frac{x^{\pm\frac{k}{2}}dx}{\sqrt{a+bx+cxx}}$; donc &c.

CCXXIII.

COROLLAIRE 2. Soit cherchée l'intégrale de $\frac{x^p dx \cdot x^{\frac{n}{2}}dx}{\overline{a+bx+cxx}^{\frac{n}{2}}}$, p & n étant des nombres entiers poſitifs. On ſuppoſera $\frac{x}{a+bx+cxx} = z^{-1}$ ce qui donne $xz = a+bx+cxx$ ou $xx+\frac{bx-xz}{c} = -\frac{a}{c}$, donc $xx+\frac{bx-xz}{c}+\frac{bb+zz}{4cc}-\frac{bz}{2cc} = -\frac{a}{c}+\frac{bb+zz}{4cc}-\frac{bz}{2cc}$, ou $x = \frac{z+b}{2c} \pm \sqrt{-\frac{a}{c}+\left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}$. Par le moyen de cette valeur de x on trouvera celle de dx ; & en faiſant les ſubſtitutions ordinaires, on aura une transformée compoſée de différentes parties intégrables chacune ſéparément par l'article CCXIX. & dépendantes par conſéquent de nos deux différentielles.

CCXXIV.

COROLLAIRE 3. Si on avoit $\frac{x^{-p} \cdot x^{\frac{n}{2}} dx}{\overline{a+bx+cxx}^{\frac{n}{2}}}$, on feroit $x = \frac{1}{u}$, ce qui donne $x^{-p} = u^p$, $dx = -\frac{du}{uu}$, & enfin la transformée ſuivante $\frac{-u^{p-2} \cdot u^{\frac{n}{2}} du}{\overline{m+nu+gu^2}^{\frac{n}{2}}}$ qui s'integre par l'article précédent, excepté dans le cas de $p = +1$ que nous allons examiner. Donc la propoſée dépend de $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(f+gu+hu^2)}}$ & de $\frac{du}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{(f+gu+hu^2)}}$, ou ce qui eſt la même choſe, de $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}$ & de $\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{(a+bx+cxx)}}$.

Dans le cas de $p = +1$ la propoſée eſt $\frac{dx \cdot x^{\frac{n}{2}}}{x \cdot \overline{a+bx+cxx}^{\frac{n}{2}}}$.

On ſuppoſera $\frac{x}{a+bx+cxx} = \frac{1}{z}$, ce qui donnera comme plus haut $x = \frac{-b+z}{2c} \pm \sqrt{-\frac{a}{c} + \frac{bb-2bz+zz}{4cc}}$, $dx = +\frac{dz}{2c} \mp \frac{bdz - zdz}{4cc \cdot \sqrt{-\frac{a}{c} + \left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}}$, & auſſi $\frac{x^{\frac{n}{2}}}{\overline{a+bx+cxx}^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{z^{\frac{n}{2}}} = z^{-\frac{n}{2}}$: donc en mettant pour x, dx, &c. leurs valeurs en z & dz, il nous viendra la transformée ſuivante $\frac{z^{-\frac{n}{2}} \times \left\{ + \frac{dz}{2c} \mp \frac{(b-z)\,dz}{4cc\sqrt{-\frac{a}{c} + \left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}} \right\}}{\frac{-b+z}{2c} \pm \sqrt{-\frac{a}{c} + \left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}}$.

Je multiplie le haut & le bas par $\frac{-b+z}{2c} \pm \sqrt{-\frac{a}{c}+\left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}$; ce qui réduira le dénominateur à une conſtante, & la transformée ſera en partie intégrable abſolument, & en partie intégrable par les Articles CCXIX. & CCXXII. en ſuppoſant l'intégration de $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{-\frac{a}{c}+\left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}}$ & de $\frac{dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{-\frac{a}{c}+\left\{\frac{b-z}{2c}\right\}^2}}$, c'eſt-à-dire de nos deux différentielles en queſtion.

CCXXV.

COROLLAIRE 4. De là il ſuit que $x^{\pm\frac{n}{2}}\,dx\times(a+bx+cxx)^{\pm\frac{p}{2}}$ dépend de l'intégration des deux différentielles $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a+bx+cxx}}$ & $\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{a+bx+cxx}}$, c'eſt-à-dire de la rectification des ſections coniques.

CCXXVI.

Différentielle qui dépend de la rectification de l'hyperbole ſeule.

REMARQUE. Il arrive cependant quelquefois que la différentielle $x^{\pm\frac{n}{2}}\,dx\,.\,(a+bx+cxx)^{\frac{p}{2}}$ ne dépend pas de la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole, mais d'une de ces deux courbes ſeulement. Soit pour le prouver $\frac{dx\sqrt{\frac{(p+2a)}{2a}xx-aa}}{\sqrt{xx-aa}}$ l'élément d'une hyperbole, ſoit $x+\sqrt{xx-aa}=z$, & par conſéquent $x=\frac{zz+aa}{2z}$ $dx=(zz-aa)\frac{dz}{2zz}$; ſuppoſons de plus $\frac{p}{2a}=q$, on aura la transformée $\frac{dz}{2zz}\left\{(zz+aa)^2\times(q+1)-4aazz\right\}^{\frac{1}{2}}$: faiſons

faiſons $zz = au$, $z = \sqrt{au}$, $dz = \frac{a\,du}{2\sqrt{au}}$, on aura la différentielle ſuivante $\frac{a\,du}{4au\sqrt{au}} \times \{(au + aa)^2 \times (q+1) - 4a^3u\}^{\frac{1}{2}} =$ en diviſant par $\sqrt{a}$, $\frac{du}{4u\sqrt{u}}\{(u+a)^2 \cdot (qa+a) - 4aau\}^{\frac{1}{2}}$, d'où l'on voit que $\frac{du\sqrt{uu + 2pua + aa}}{u\sqrt{u}}$ dépend de la rectification de l'hyperbole ſeule, p étant $= \frac{q-1}{q+1}$.

CCXXVII.

Si on propoſe de trouver l'intégrale de $x^{\pm\frac{n}{2}}\,dx\,.\,(a \mp xx)^{\pm\frac{p}{2}}$, p & n exprimant des nombres entiers & a étant poſitif ou négatif. Second exemple.

1°. On prendra $\frac{x^q\,dx}{\sqrt{a \mp x^2}}$. Pour trouver l'intégrale de cette différentielle, comparons-la avec la formule (X) de l'Article LXXXVIII.

$$\int g x^m dx\,(a + bx^n)^p = \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a}\,u\,x^{m+1}\left\{-\left(\frac{m+1+np+n}{m+1}\right) \times \frac{b}{a} \times \int g x^{m+n}\,dx \times \overline{a+bx^n}^p\right\}$$

— &c. on trouvera . . . . . $g = 1$, $m = q$, $b = 1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, $u = \overline{a \mp xx}^{+\frac{1}{2}}$;

faiſant ces ſubſtitutions dans la formule, on trouvera

l'intégrale de $\frac{x^q\,dx}{\sqrt{a \mp x^2}} = \frac{x^{q+1}\sqrt{a \mp xx}}{(q+1)\,a} \pm \frac{q+2}{(q+1)\,a} \int \frac{x^{q+2}\,dx}{\sqrt{a \mp xx}}$: d'où l'on voit que ſi on ſuppoſe $q = \frac{k}{2}$, k étant un nombre impair poſitif ou négatif, $\frac{x^q\,dx}{\sqrt{a \mp x^2}}$ & $\frac{x^{q+2}\,dx}{\sqrt{a \mp xx}}$ dépendront toujours l'une de l'autre. Donc $\frac{x^{\frac{1}{2} \pm 2f}\,dx}{\sqrt{a \mp xx}}$ dépend toujours de $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a \mp xx}}$, c'eſt-à-dire de la rectification de l'hyperbole, (Art. CCIX.) & quelquefois de celle de l'ellipſe.

2°. $x^{\frac{1}{2} \pm 2f}\,dx\,(a \mp xx)^{\frac{g}{2}}$ en dépend auſſi, parce qu'il n'y a qu'à la multiplier haut & bas par $\sqrt{a \mp xx}$, ce qui la changera en une ſuite de termes de la forme $\frac{x^{\frac{1}{2} \pm 2k}\,dx}{\sqrt{a \mp xx}}$.

3°. On prouvera de même que $\frac{dx \cdot x^{-\frac{1}{2} \pm 2f}}{\sqrt{a \mp xx}}$ & $dx \cdot x^{-\frac{1}{2} \pm 2f} \times (a \mp xx)^{\frac{g}{2}}$ dépendent de $\frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{a \mp xx}}$, c'eſt-à-dire (Art. CCX. & CCXIII.) de la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole.

4°. Si on prend la différence de $\frac{x^{\frac{m}{2}}}{(a \mp xx)^{\frac{g}{2}}}$, m & g étant des nombres impairs, & m poſitif ou négatif, on aura $\frac{m\,x^{\frac{m}{2}-1}\,dx}{2\,(a \mp xx)^{\frac{g}{2}}} \pm \frac{g\,x^{\frac{m}{2}+1}\,dx}{2\,(a \mp xx)^{\frac{g}{2}+1}}$, ce qui nous

montre que l'intégration de $\frac{x^{\pm\frac{n}{2}}dx}{(a\mp xx)^{\frac{p}{2}}}$ dépend de celle de $\frac{x^{\pm\frac{n}{2}\mp 2}dx}{(a\mp xx)^{\frac{p}{2}+1}}$, & qu'ainſi (n°. 1, 2, 3 du préſent Article) elle dépend de $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a\mp xx}}$ & de $\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{a\mp xx}}$.

CCXXVIII.

COROLLAIRE 1. Puiſque $x^{\pm\frac{n}{2}}dx.(a\mp xx)^{\pm\frac{p}{2}}$ dépend (Art. CCXXVII.) de la rectification des ſections coniques, il s'enſuit en faiſant $a\mp xx=uu$, que $(a\mp uu)^{(\pm\frac{n}{2}-1)\times\frac{1}{2}}\times u^{\pm p+1}du$ en dépend auſſi, & en faiſant $u=\frac{1}{y}$, que $(k\pm yy)^{\pm\frac{n-2}{4}}\times y^{\mp p\mp\frac{n}{2}-2}dy$ en dépend encore: donc en général $(a\pm byy)^{\pm\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\times y^{\pm p}dy$, & $(a\pm byy)^{\pm\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\times y^{\pm\frac{q}{2}}dy$ en dépendent.

Autres différentielles dont l'intégrale ſuit de celle de notre ſecond exemple.

CCXXIX.

COROLLAIRE 2. Si la propoſée étoit $(ax+b)^p\,dx\times(f+gx+hxx\pm x^3)^{\pm\frac{n}{2}}$, n exprimant un nombre entier impair, & p un nombre entier poſitif quelconque, dans ce cas comme (Art. LXXXV. Introd.) $f+gx+hxx\pm x^3$ a toujours au moins une racine réelle, on la ſuppoſera $c\pm x=z$; faiſant la ſubſtitution, on aura une différentielle compoſée de différens termes tous intégrables par l'Article CCXXV.

XVI.

Solution générale du Problême.

COROLLAIRE. Donc en général la différence de $\int A\,dx$, y étant supposée variable, sera $dy\int \frac{dA}{dy}\,dx$; dans cette quantité, $\frac{dA}{dy}$ exprime le coefficient qu'auroit dy dans la différentiation de la quantité A. Ce qu'on voit aisément par l'exemple ci-dessus.

Après la solution de ce Problême, passons à l'exposition de la méthode. Nous l'appliquerons d'abord aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables; ensuite nous l'appliquerons à celles qui en renferment trois ou un plus grand nombre.

§. I. *Exposition de la méthode appliquée aux quantités & aux équations différentielles qui ne renferment que deux variables.*

XVII.

Théorême fondamental.

THÉOREME. Si on différentie une quantité telle que A composée de deux variables t & u, en faisant u variable & t constant, & qu'ensuite on différentie la différentielle qui en résulte en faisant t variable & u constant, on aura la même quantité que si on différentioit d'abord A en faisant u constant & t variable, & qu'ensuite on différentiât la différentielle qui en résulte en faisant t constant & u variable. Par exemple, soit $A = \sqrt{(t^2 + nu^2)}$. Différentions cette quantité en supposant t constant, la différentielle sera $\frac{nu\,du}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$, qui différentiée de nouveau en traitant u comme constant, donne $\frac{-ntu\,dt\,du}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$;

$= 2udu$, on aura une transformée $u^{k+1}\,du\,(b \pm uu)^{\frac{n-3}{6}}$; ce qui nous montre que k étant un nombre entier positif ou négatif, & n un nombre entier positif & impair, la proposée s'integre (Article précédent) par la rectification des sections coniques, & qu'elle peut s'intégrer par cette rectification, n étant impair & négatif.

CCXXXII.

Troisieme exemple.

Si on demande l'intégrale de $x^p\,dx\,(f+gx+hxx)^{\frac{n}{4}}$, p étant un nombre entier positif & n positif ou négatif, je la trouve ainsi :

Je fais $f+gx+hxx=z^4$; donc $xx+\frac{gx}{h}+\frac{gg}{4hh} = \frac{z^4-f}{h}+\frac{gg}{4hh}$, & $x=-\frac{g}{2h}\pm\frac{1}{2h}\sqrt{4hz^4-4fh+gg}$, & en faisant $z^4=uu$, on aura $dx=\pm\frac{u\,du}{\sqrt{uuh-fh+\frac{gg}{4}}}$, & on trouvera en faisant les substitutions une transformée intégrable par des arcs de sections coniques.

Si $g=0$, l'intégration ne se fera pas moins de la même maniere, p & n étant positifs ou négatifs.

CCXXXIII.

Quatrieme exemple.

Soit encore la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+ex^3+fx^4)}}$ dont on cherche l'intégrale. Pour la trouver, je distingue deux cas ; car le dénominateur a ses racines réelles ou imaginaires.

1°. S'il a des racines réelles, je suppose que $mx+n$ en

les trois dont les différentielles ſe trouvent dans ces trois termes. Donc en pratiquant ce qui a été dit (Art. XXXIV.) pour les équations à trois variables, on voit aiſément qu'on aura autant d'équations à vérifier comme $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$, qu'il aura de manieres de combiner trois à trois les fonctions A, B, C, D, E, &c. Lorſque toutes les équations de la même nature que la précédente, venues par la combinaiſon des termes $Adx + Bdy + Cdz + Ddu +$ &c. pris trois à trois, auront en même temps lieu, on pourra rendre l'équation propoſée une différentielle complete.

XLIII.

REMARQUE. On peut cependant abreger le nombre de ces équations à vérifier, parce que quelques-unes ſuivent néceſſairement des autres. Pour le prouver je prends l'équation à quatre variables $Adx + Bdy + Cdz + Ddu = 0$. Cette équation par la combinaiſon des quatre lettres A, B, C, D priſes trois à trois me donnent les quatre équations ſuivantes :

Ce nombre peut quelquefois ſe diminuer.

Preuve ſur une équation à quatre variables.

$$1^{\circ}.\ Adx + Bdy + Cdz = 0$$
$$2^{\circ}.\ Adx + Bdy + Ddu = 0$$
$$3^{\circ}.\ Adx + Cdz + Ddu = 0$$
$$4^{\circ}.\ Bdy + Cdz + Ddu = 0$$

De la premiere équation on tire en ſuivant le calcul de l'Article XXXIV. $\frac{BdC}{dx} - \frac{CdB}{dx} + \frac{AdB}{dz} - \frac{BdA}{dz} - \frac{AdC}{dy} + \frac{CdA}{dy} = 0$; la ſeconde nous donne en ſuivant le même

$\frac{ll - 2g'lz + g'g'zz}{4kk}$: donc enfin prenant la racine quarrée

$x = \frac{g'z-l}{2k} \pm \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2}$ & $xx = \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2$

$\pm \left\{\frac{g'z-l}{k}\right\} \sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2} + \frac{\delta z-g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2$.

Le dénominateur devient donc $\sqrt{\varphi + \frac{1}{z}} \times \left\{ g + \frac{g'lz - ll}{2k} \right.$

$\pm l\sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2} + 2k\left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2 \pm$

$g'z\sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2} \mp l\sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2}$

$\left. + \delta z - g \right\}$: Réduiſant cette quantité, elle devient celle-ci $\sqrt{z} \cdot \sqrt{\varphi z + 1} \times \left\{ \frac{g'g'z - lg'}{2k} + \delta \pm \right.$

$g'\sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2}$. On a auſſi $dx = \frac{g'dz}{2k} \pm$

$\frac{\frac{\delta dz}{k} + \frac{lg'dz \pm g'g'zdz}{2kk}}{2\sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2}}$. La transformée entiere ſera donc

$$\frac{\frac{dz}{k} \times \left\{ g'\sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2} \pm \delta \mp \frac{lg' \pm g'g'z}{2k} \right\}}{2\sqrt{\frac{\delta z+g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2}}$$

$$\sqrt{z} \cdot \sqrt{\varphi z + 1} \cdot \times \left\{ \frac{g'g'z - lg'}{2k} \pm \delta \pm g'\sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2} \right\}$$

Je multiplie cette différentielle haut & bas par $\frac{g'g'z - lg'}{2k} + \delta$

$\mp g'\sqrt{\frac{\delta z-g}{k} + \left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2}$, ce qui rend le dénominateur $= \sqrt{z} \cdot \sqrt{(\varphi z + 1)} \times \left[\left(\frac{g'g'z - lg'}{2k}\right)^2 + 2\delta \times \right.$

$\left(\frac{g'g'z - lg'}{2k}\right) + \delta\delta - g'g' \times \left\{ \frac{\delta z-g}{k} + \left(\frac{g'z-l}{2k}\right)^2 \right\} \left. \right]$

$= \sqrt{z} \cdot \sqrt{\varphi z + 1} \cdot \times \left[\frac{g'^4 zz}{4kk} - \frac{g'^3 lz}{2kk} + \frac{llg'g'}{4kk} + \right.$

$\frac{\delta g'g'z}{k} - \frac{\delta lg'}{k} + \delta\delta - \frac{\delta g'g'z}{k} + \frac{g'^2 g}{k} - \frac{g'^4 zz}{4kk} + \frac{g'^3 lz}{2kk} \rightarrow$

$\frac{\delta\delta lg'g'}{4kk}\Big] =$ (en effaçant ce qui se détruit) $\sqrt{z}\cdot\sqrt{\varphi z+1}\times\left\{\delta\delta-\frac{\delta lg'}{k}+\frac{g'^2g}{k}\right\}$. Le numérateur multiplié par la même quantité devient $\frac{dz}{k}\times\Big[\frac{g'^3z-lg'g'}{2k}\sqrt{\frac{\delta z-g}{k}+\left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2}$
$\pm\frac{\delta g'g'z\mp\delta lg'}{2k}\mp\frac{2g'^3lz\pm g'^4zz\pm llg'g'}{4kk}+\delta g'\sqrt{\frac{\delta z-g}{k}+\left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2}$
$\pm\delta\delta\mp\frac{\delta lg'\pm\delta g'^2z}{2k}\mp\frac{g'g'\delta z\pm g'gg}{k}\mp\frac{g'^4zz\pm 2g'^3lz\mp g'g'll}{4kk}$
$-\delta g'\sqrt{\frac{\delta z-g}{k}+\left\{\frac{gz-l}{2k}\right\}^2}+\frac{lg'g'-g'^3z}{2k}\sqrt{\frac{\delta z-g}{k}+\left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2}\Big]$.
On voit en effaçant ce qui se détruit, que cette quantité se réduit à $\frac{dz}{k}\times\pm\left\{\delta\delta-\frac{\delta lg'}{k}+\frac{g'gg}{k}\right\}$. La transformée est donc

$$\frac{\delta z}{k}\times\pm\left\{\delta\delta-\frac{\delta lg'+g'g'g}{k}\right\}$$

$$\sqrt{z}\cdot\sqrt{\varphi z+1}\cdot 2\sqrt{\frac{\delta z-g}{k}+\left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2}\times\left\{\delta\delta+\frac{g'g'g-\delta lg'}{k}\right\}$$
$$=\frac{\pm dz}{\sqrt{z}\cdot\sqrt{\varphi z+1}\times 2k\sqrt{\frac{\delta z-g}{k}+\left\{\frac{g'z-l}{2k}\right\}^2}}.$$ Pour intégrer cette différentielle, je fais $z=\frac{1}{u}$, $dz=-\frac{du}{uu}$; ce qui donne

$$\frac{\mp\frac{du}{uu}}{\sqrt{\frac{1}{u}}\cdot\sqrt{\frac{\varphi}{u}+1}\cdot 2k\sqrt{\frac{\frac{\delta}{u}-g}{k}+\left\{\frac{\frac{g'}{u}-l}{2k}\right\}^2}}$$
$$=\frac{\mp\frac{du}{uu}}{\frac{1}{u}\sqrt{\varphi+u}\cdot 2k\sqrt{\frac{\delta-gu}{ku}+\frac{g'g'-2g'lu+llu u}{4kkuu}}}=$$
$$\frac{\mp du}{\sqrt{\varphi+u}\cdot\sqrt{(4\delta k-2g'l)u+(ll-4kg)uu+g'g'}}=\frac{\mp du}{\sqrt{\varphi+u}\cdot\sqrt{ff\pm pu\pm quu}},$$
qui s'integre par les Problêmes précédens, & se réduit à des arcs de sections coniques.

CCXXXIV.

CCXXXIV.

REMARQUE. Il faut remarquer que ſi la quantité $\delta\delta - \frac{\delta g'l}{k} + \frac{gg'g'}{k}$ qui multiplie le haut & le bas de la transformée étoit égale à zéro, alors la ſolution ne dépendroit plus que des logarithmes. Car réſolvant cette équation par les regles ordinaires de l'Algebre, on auroit $\delta - \frac{g'l}{2k} = \pm g' \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{ll}{4kk}}$, d'où on tire $\delta = \frac{g'l}{2k} \pm g' \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{ll}{4kk}}$. Donc $\frac{g'x + \delta}{g + lx + kxx}$ ſe réduiroit à $\frac{g'}{k\left(x + \frac{l}{2k} \pm \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{ll}{4kk}}\right)}$. Donc alors la propoſée dépendroit de la quadrature de l'hyperbole.

CCXXXV.

Si on a la différentielle $\frac{dx}{(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4)^{\frac{p}{2}}}$, elle pourra toujours s'intégrer par des arcs de ſections coniques, pourvu que le dénominateur $a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ ait quelques racines réelles : car alors on ſuppoſera, comme dans la premiere partie de l'article précédent, $mx + n = z$ & $z = \frac{1}{u}$. Conſéquences qu'on en peut tirer.

CCXXXVI.

Qu'on propoſe à intégrer $\frac{x^{\pm p}\,dx}{\sqrt{x} \cdot (a + bx)^{\frac{n}{2}} \cdot (c + fx + gxx)^{\frac{m}{2}}}$, on fera $x = \frac{1}{y}$, $dx = -\frac{dy}{yy}$, $x^{\pm p} = \frac{1}{y^{\pm p}}$; & en faiſant les ſubſtitutions on aura la différentielle ſuivante

$$\frac{\frac{1}{y^{\mp p}} \times \frac{-dy}{yy}}{\sqrt{\frac{1}{y} \times \left(\frac{b+ay}{y}\right)^{\frac{n}{2}} \times \left(\frac{g+fy+cyy}{yy}\right)^{\frac{m}{2}}}} = \frac{-y^{\mp p-2}\,dy}{\frac{1}{y^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}(b+ay)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{y^m}(g+fy+cyy)^{\frac{m}{2}}}$$; donc enfin la transformée ſera $\frac{-y^{\mp p-2+\frac{n+1}{2}+m}\,dy}{(k+ly)^{\frac{n}{2}} \cdot (p+qy+syy)^{\frac{m}{2}}}$.

Ce qui nous apprend que ſi l'expoſant de y dans le numérateur eſt un nombre entier poſitif, la propoſée s'integrera par des arcs de ſections coniques en faiſant $k+ly=z$.

CHAPITRE XVII.

Des différentielles dont l'intégration dépend de la quadrature des courbes du troiſieme ordre.

CCXXXVII.

Définition des courbes du troiſieme ordre.

LEs lignes du troiſieme ordre ou du ſecond genre ſont celles dans l'équation deſquelles l'expoſant de l'indéterminée élevée à la plus haute puiſſance, ou la ſomme des expoſans des puiſſances des deux indéterminées, eſt du troiſieme degré. Ces courbes ſont par conſéquent coupées en trois points par une même ligne droite: car on ſait que le degré de l'équation qui exprime la

nature d'une ligne géométrique, eſt égal au nombre des points dans leſquels cette ligne géométrique peut être coupée par une même droite.

CCXXXVIII.

L'équation générale la plus compoſée des lignes du troiſieme ordre eſt $a + by + cx + kyy + exy + fxx + gy^3 + hxyy + ixxy + lx^3 = 0$. Mais cette équation peut ſe ſimplifier en donnant aux coordonnées de certaines poſitions. M. Newton eſt le premier qui ait écrit ſur les courbes du ſecond genre, un Ouvrage dans lequel il les détaille & annonce leurs propriétés générales. Il donne quatre équations auxquelles il les rapporte toutes. Ces quatre équations ſont :

Leur formule générale.

Quels ſont les Géometres qui ont écrit ſur cette matiere.

$$xyy - ey = ax^3 + bx^2 + cx + f$$
$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + f$$
$$yy = ax^3 + bx^2 + cx + f$$
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + f. \ *$$

Quatre équations auxquelles ſe ramenent toutes celles des courbes du troiſieme ordre.

CCXXXIX.

Nous donnerons ci-après les quadratures de ces quatre équations auxquelles ſe réduiſent celles de toutes les courbes du troiſieme ordre. Car quelle que ſoit l'équation d'une courbe de ce genre, ſa quadrature ſe réduira toujours à l'une des quatre précédentes. En effet tranſportant les axes dans une autre poſition pour réduire l'équation donnée

* *Nota.* Voyez pour la démonſtration de cette propoſition un excellent Mémoire de M. Nicole. *Mém. Acad.* 1729.

à l'une des quatre formules générales, on n'aura que des eſpaces rectilignes à ajouter ou à ſouſtraire pour avoir l'aire rapportée aux coordonnées primitives, ce qu'il eſt aiſé de prouver ainſi.

La quadrature de toutes les courbes du 3e. ordre ſe réduit toujours à celle d'une des quatre équations précédentes.

Soit donnée l'équation quelconque d'une courbe du troiſieme ordre BM (Fig. 8.) dont les coordonnées z & u ſont AP & PM, (l'angle qu'elles forment étant quelconque). Tirant la droite AB parallele à PM, l'eſpace qu'il s'agit de quarrer eſt $ABMP$. Transformons l'équation donnée en l'une de nos quatre équations générales, & ſuppoſons que cette transformation introduiſe pour nouvelles coordonnées aQ & Qk, l'origine étant en a. Menant par les points de la courbe M & B les droites Mp & Bb paralleles à la nouvelle ordonnée Qk, on trouvera par la méthode que nous donnerons plus bas l'eſpace $BbpM$. Cet eſpace étant trouvé, comme il n'eſt autre que $APMB - GPM + BAGpb$, il ne s'agira pour avoir la quadrature de l'aire $APMB$ rapportée aux coordonnées primitives, que d'ajouter à l'aire connue $BbpM$ l'eſpace GPM, & d'en retrancher enſuite l'eſpace $BAGpb$. Mais ces deux eſpaces ſont rectilignes. Donc pour avoir la quadrature de l'aire rapportée aux coordonnées primitives, on n'a que des eſpaces rectilignes à ajouter ou à ſouſtraire. *C. Q. F. P.*

Avant de donner la méthode générale de quarrer toutes les courbes du troiſieme ordre, nous allons chercher l'intégration des différentielles générales qui en dépendent.

CCXL.

LEMME. L'intégrale de $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cxx+fx^3)}}$ dépend de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre.

Différentielle qui dépend de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre dont l'équation eſt $uyy = k+lu+mu^2+nu^3$.

DÉMONST. Soit $x = \frac{1}{u}$, on aura $dx = -\frac{du}{uu}$, & la propoſée devient $\frac{-\frac{du}{uu}}{\frac{1}{u}\cdot\frac{\sqrt{(au^3+bu^2+cu+f)}}{\sqrt{u^3}}} = \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$. La difficulté ſe réduit donc à intégrer cette transformée. Pour y parvenir, je cherche l'intégrale de $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$, qui eſt l'élément d'un eſpace curviligne du troiſieme ordre dont l'équation ſeroit $uyy = k+lu+mu^2+nu^3$. Car cette équation donne $y = \frac{\sqrt{(k+lu+muu+nu^3)}}{\sqrt{u}}$, & ſubſtituant cette valeur de y dans la formule de l'élément de l'aire des courbes, $dx = y\,du$, on trouve $\frac{du\sqrt{(k+lu+muu+nu^3)}}{\sqrt{u}}$.

Pour intégrer cette différentielle, je la multiplie haut & bas par $\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}$, ce qui me donne $\frac{k\,du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{(k+lu+muu+nu^3)}} + \frac{(l\,du+mu\,du+nu^2\,du)\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+muu+nu^3)}}$. Voilà donc deux membres qui intégrés ſéparément donneront l'intégrale cherchée.

1°. Je fais dans le premier membre $u = \frac{1}{z}$, d'où je tire $du = -\frac{dz}{zz}$, $\sqrt{u} = \frac{1}{\sqrt{z}}$: donc en faiſant ces ſubſtitutions $\frac{k\,du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{(k+lu+muu+nu^3)}} = \frac{-\frac{k\,dz}{zz}}{\frac{1}{\sqrt{z}}\cdot\frac{\sqrt{(kz^3+lz^2+mz+n)}}{z\sqrt{z}}} = \frac{-k\,dz}{\sqrt{(n+mz+lz^2+kz^3)}}$ que nous avons vu (Art. CCXXIX.)

$z+x$; $dy=dz+dx$. Après les ſubſtitutions, l'équation propoſée deviendra $adx=zdz+zdx$; ou $adx-zdx=zdz$. Donc en diviſant par $a-z$, on a $dx=\frac{zdz}{a-z}$; équation dans laquelle les indéterminées ſont ſéparées; & qui a pour intégrale $x=a-z+l(a-z)^{-a}+C$. Remettant pour z ſa valeur $y-x$, on aura $x=a-y+x+l\frac{1}{(a-y+x)^a}+C$ pour l'intégrale cherchée. On verra d'ailleurs plus bas une méthode pour intégrer cette équation ſans transformation. Voyez le Chap. VII. des transformations. Premier exemple.

LVI.

Soit l'équation $aadx=x^2dy+2xydy+yydy$; je fais $x+y=z$: j'en tire $dx+dy=dz$. La propoſée devient donc $aadz-aady=z^2dy$; c'eſt-à-dire $\frac{aadz}{zz+aa}=dy$: j'integre maintenant, & j'ai $y=\int\frac{aadz}{zz+aa}$; le ſecond membre dépendant (Art. CVII. de la Ire Partie,) de la quadrature du cercle. Second exemple.

LVII.

Si la propoſée étoit $(xdy+ydx)\times(a^4-xxyy)^{\frac{1}{2}}=\frac{xdx+ydy}{(xx+yy)^{\frac{1}{2}}}$, je remarque que dans le premier membre de cette équation $xdy+ydx$ eſt la différentielle de xy & que le quarré de cette intégrale ſe trouve dans la quantité ſous le ſigne. Je fais donc $xy=z$, & j'ai pour premier membre de ma transformée $dz.(a^4-zz)^{\frac{1}{2}}$ qui eſt tel que je le demande. Je vois de plus que dans le ſecond Troiſieme exemple.

$$\frac{nu^3\,du\sqrt{u}+mu\,du\sqrt{u}+l\,du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} = d\left\{u^{\frac{1}{2}}\,\frac{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{2}\right\} + \frac{2l\,u\,du}{4\sqrt{u}\cdot\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} + \frac{m}{4n}\,d\left\{u^{-\frac{1}{2}}\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}\right\} - \frac{mmu\,du}{8n\sqrt{u}\cdot\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} + \frac{m}{4n}\times\left\{\frac{\frac{k}{2}\,du\,.\,u^{-\frac{3}{2}}-\frac{k}{m}\,nu^{-\frac{1}{2}}\,du}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}\right\}.$$

Je fais dans le dernier terme $u=\frac{1}{z}$, ce qui me donne $u^{-\frac{3}{2}}=z^{\frac{3}{2}}$; $u^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{z}$; $du=-\frac{dz}{zz}$. Donc j'ai $\frac{\frac{k}{2}\,du\,.\,u^{-\frac{3}{2}}-\frac{k}{m}\,nu^{-\frac{1}{2}}\,du}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} = \frac{kn\,dz}{m\sqrt{(n+mz+lz^2+kz^3)}} - \frac{kz\,dz}{2\sqrt{(n+mz+lz^2+kz^3)}}$, différentielle dont les deux membres se rapportent à des arcs de sections coniques, comme on l'a déja vu plusieurs fois. Donc en réunissant tous les différens membres de la transformée $\frac{k\,du+l\,u\,du+mu^2\,du+nu^3\,du}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$, on trouve que l'intégrale de la différentielle $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ dépend de la rectification des sections coniques & de $\left\{\frac{l}{2}-\frac{mm}{8n}\right\}\times\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$. Donc réciproquement l'intégrale de $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ dépend de celle de $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$, & dépend par conséquent de la quadrature d'une courbe du troisieme ordre. Donc $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cxx+fx^3)}}$ en dépend aussi. *C. Q. F. D.*

CCXLI.

Cas unique dans lequel la démonstration précédente peut faire quelque difficulté.

SCHOLIE 1. Il n'y a qu'un seul cas qui puisse souffrir quelque difficulté, c'est celui dans lequel $\frac{l}{2}=\frac{mm}{8n}$,

ou $4ln = mm$. Dans ce cas $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ dépend uniquement des ſections coniques, donc $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ & $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ ne dépendent point l'une de l'autre. Mais alors nous venons de voir que la premiere de ces différentielles ſe réduit à des arcs de ſections coniques. La ſeconde peut ſe réduire à la quadrature d'un eſpace curviligne du troiſieme ordre, excepté dans un ſeul cas où elle dépend de la rectification des ſections coniques. Voici comme je le prouve.

Solution de cette difficulté.

Soient les trois racines de $k+lu+muu+nu^3$, $au+b$, $cu+e$, $gu+f$; il y en aura au moins une réelle (Art. LXXXV. Introd.), deux peuvent être imaginaires, on aura donc (A) $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} = \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(au+b)\cdot(cu+e)\cdot(gu+f)}} = (B)$ $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{bef+(beg+bcf+aef)u+(bcg+acf+aeg)u^2+acgu^3}}$.

Comparant terme à terme les deux équations (A) & (B), on a . . . . . $k = bef$

$l = beg+bcf+aef$

$m = bcg+acf+aeg$

$n = acg$.

On aura donc $4ln = 4abcegg+4abccfg+4aacefg$, $mm = bbccgg+2abccgf+2abecg^2+a^2c^2f^2+2a^2cefg+a^2e^2g^2$. L'équation $4ln = mm$, qui eſt la ſuppoſition préſente, donne donc $4abceg^2+4abc^2fg+4a^2cefg = b^2c^2g^2+2abc^2gf+2abecg^2+a^2c^2f^2+$

$+ 2a^2cefg + a^2e^2g^2$, ou bien $2abceg^2 + 2abe^2fg + 2a^2cefg + 2abceg^2 + 2abc^2fg + 2a^2cefg = b^2c^2g^2 + 2abc^2fg + 2abeeg^2 + a^2c^2f^2 + 2a^2cefg + a^2e^2g^2$: donc enfin on a en réduiſant (C) $2abceg^2 + 2abc^2fg + 2a^2cefg = b^2c^2g^2 + a^2c^2f^2 + a^2e^2g^2$.

Soit maintenant $au + b = x$, on en tire $u = \frac{x-b}{a}$: $du = \frac{dx}{a}$; &c. La propoſée ſe change donc en

$$\frac{\frac{dx}{a} \cdot \frac{\sqrt{x-b}}{\sqrt{a}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{\left\{\frac{cx-bc+ae}{a}\right\} \cdot \left\{\frac{gx-bg+af}{a}\right\}}} =$$ en multipliant haut & bas par $\sqrt{(x-b)}$

$$\frac{x\,dx - b\,dx}{a\sqrt{a} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-b} \cdot \sqrt{\left\{\frac{cx-bc+ae}{a}\right\} \cdot \left\{\frac{gx-bg+af}{a}\right\}}}.$$

Cette différentielle a deux membres. Le ſecond, en faiſant $x = \frac{1}{z}$, devient après les ſubſtitutions différentes que donne cette transformation $\frac{dz}{\sqrt{(\alpha z^3 + \zeta z^2 + \gamma z + \lambda)}}$, qu'on ſait ſe réduire à des arcs de ſections coniques.

A l'égard du premier membre, il ſe rapporte à la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre, excepté dans un ſeul cas dans lequel la différentielle eſt beaucoup plus ſimple. En effet, ce premier membre eſt (D)

$$\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{egx^3 + (aeg - 3bcg + afc)x^2 + (3b^2cg - 2abcf + a^2ef)x - b^3cg + ab^2ef - a^2ebf + aeb^2g}}$$

qui dépend d'une quadrature du troiſieme ordre, étant la

même différentielle que (A) $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ que nous avons démontré en dépendre, hormis quand $4ln = mm$. Pour trouver ici quel est ce cas, je compare terme à terme les différentielles (D) & (A) ; cette comparaison me donne $l = 3b^2cg - 2abeg - 2abcf + a^2ef$

$$m = -3bcg + aeg + afc$$

$$k = acb^2g - bcdg + ab^2cf - a^2ebf$$

$$n = cg$$

donc $4ln = 12b^2c^2g^2 - 8abceg^2 - 8abc^2fg + 4a^2cefg$ & $mm = 9b^2c^2g^2 - 6abceg^2 - 6abc^2fg + a^2e^2g^2 + 2a^2cefg + a^2c^2f^2$: donc l'équation $4ln = mm$ devient ici $12b^2c^2g^2 - 8abceg^2 - 8abc^2fg + 4a^2cegf = 9bbc^2g^2 - 6abceg^2 - 6abc^2fg + a^2e^2g^2 + 2a^2cefg + a^2c^2f^2$, ou bien en réduisant (E) $3c^2g^2b^2 - 2abceg^2 - 2abc^2fg = a^2e^2g^2 - 2a^2cefg + a^2c^2f^2$. Quand cette équation a lieu, la proposée ne dépend point du Lemme précédent ; mais examinons ce qui arrive alors.

Cette équation (E) combinée avec l'équation (C) donne la suivante $c^2g^2b^2 - aebcg^2 + bc^2agf = 0$; mais cette derniere équation n'est égale à zéro, que parce que l'un de ses facteurs est $= 0$; or elle est composée de $cgb \times (cgb - aeg - acf)$; on aura donc ou $cgb = 0$, ou $cgb - aeg - acf = 0$. 1°. Dans le cas de $cgb = 0$, on a $c = 0$, ou $b = 0$, ou $g = 0$, c'est-à-dire en combinant la différentielle (B) avec (A) $n = 0$, ou $k = 0$. Donc $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$, devient alors $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(lu+mu^2+nu^3)}} = \frac{du}{\sqrt{l+mu+nu^2)}}$ qui

s'integre par la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, ſuivant ce que nous avons dit dans l'article des fractions rationelles, ſoit que les racines ſoient égales ou inégales, réelles ou imaginaires; ou bien $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2)}}$, que nous avons démontré (Art. CCVI.) dépendre des arcs de ſections coniques.

2°. Si on avoit $cgb-aeg-acf=0$, on en tireroit $cgb=aeg+acf$, & en élevant au quarré (*F*) $c^2g^2b^2=a^2e^2g^2+2a^2ecfg+a^2c^2f^2$; mais on a l'équation (*E*) $2c^2gb^2+c^2g^2b^2-2baecg^2-2afc^2bg=a^2e^2g^2-2a^2egfc+a^2f^2c^2$; mettant dans (*E*) pour $2c^2g^2b^2$ ſa valeur tirée de (*F*), on a $2a^2e^2g^2+4a^2ecfg+2a^2c^2f^2+c^2gb^2-2abecg^2-2afc^2bg=a^2e^2g^2-2a^2egfc+a^2f^2c^2$, & en réduiſant (*I*) $g^2c^2b^2+a^2e^2g^2+a^2c^2f^2=2g^2bcae+2c^2afgb-2a^2egcf$. Cette équation (*I*) combinée avec l'équation (*C*) donne $2a^2cefg=0$, d'où il s'enſuit que a, ou e, ou g, ou c, ou $f=0$; donc on aura encore ou $k=0$, ou $n=0$, & par conſéquent la différentielle $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ ſe réduit encore à des logarithmes ou à des arcs de cercle ou de ſections coniques. Donc enfin ſi $4ln=mm$, on peut toujours réduire $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ à la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre, excepté lorſque $3c^2gb^2-2abceg^2-2ac^2fg^2=a^2e^2g^2-2a^2cefg+a^2c^2f^2$, auquel cas elle s'intégrera par des arcs de ſections coniques. *C. Q. F. D.*

CCXLII.

SCHOLIE 2. Si la proposée $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ étoit présentée sous la forme suivante $\frac{dx}{x\sqrt{(n+mx)}\cdot\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$ qui est la même, on trouveroit encore les différentes transformations dont cette différentielle est susceptible, & les cas dans lesquels ces transformées sont réductibles à la rectification des sections coniques.

Si les racines de $a \pm bx + cxx$ sont imaginaires, on transformera toujours la proposée en d'autres dans lesquels les facteurs du binome sont réels. En effet les racines de $a \pm bx + cxx$ ne sont imaginaires, que lorsque a & c sont positifs & que $4ac$ est $> bb$, puisque l'on a $xx \pm \frac{b}{2c} = \sqrt{\left\{\frac{-4ac+bb}{4cc}\right\}}$. Je fais $x \pm \frac{b}{2c} = z$, j'aurai en quarrant $xx \pm \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} = zz$; donc $xx \pm \frac{bx}{c} + \frac{a}{c} = zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc}$. Mettant les valeurs de x & de dx dans la proposée, elle deviendra la suivante $\frac{dz}{z \mp \frac{b}{2c}\cdot\sqrt{(mz \mp \frac{mb}{2c} + n)}\cdot\sqrt{(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc})}}$. Je fais maintenant $z + \sqrt{(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc}} = u$, j'en tire $zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc} = uu - 2uz + zz$; c'est-à-dire $\frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc} = uu - 2uz$. Donc $z = \frac{uu - \frac{a}{c} + \frac{bb}{4cc}}{2u}$. Soit pour abréger $\frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc} = qq$, on aura $z = \frac{uu-qq}{2u}$: $dz = \frac{u^2\,du + qq\,du}{2u^2}$, & $\frac{dz}{\sqrt{(zz+qq)}} = \frac{du}{u}$. On aura

donc $\frac{dz}{z \mp \frac{b}{2c} \cdot \sqrt{(zz+qq)}\sqrt{(mz \mp \frac{mb}{c}+n)}} = \frac{2du\sqrt{2u}}{(uu-qq \mp \frac{bu}{c}) \cdot \sqrt{(muu-mqq \mp \frac{mbu}{c}+2nu)}}$.

Je remarque que les racines de $uu-qq \mp \frac{bu}{c}$ ſont réelles, auſſi bien que celles de $muu-mqq \mp \frac{mbu}{c}+2nu$, uu & qq étant de différens ſignes. Je ſuppoſe donc $\frac{1}{uu-qq \mp \frac{bu}{c}} = \frac{N}{u+k}+\frac{R}{u+s}$, & je fais pour abréger $\mp \frac{mb}{c}+2n=p$. J'aurai donc la derniere différentielle ſous la forme ſuivante $\frac{2Ndu\sqrt{2u}}{(u+k)\sqrt{(mu^2-mq^2+pu)}}+\frac{2Rdu\sqrt{2u}}{(u+s)\sqrt{(muu-mqq+pu)}} = \frac{4Nudu}{(u+k)\cdot\sqrt{2u}\cdot\sqrt{(mu^2-mq^2+pu)}}+\frac{4Rudu}{(u+s)\cdot\sqrt{2u}\cdot\sqrt{(mu^2-mq^2+pu)}}$: ces deux membres ont abſolument la même forme, ainſi ce que l'on fera pour l'un, doit ſe pratiquer de même pour l'autre. Je diviſe $\frac{4Nudu}{(u+k)\cdot\sqrt{2u}\cdot\sqrt{(mu^2-mq^2+pu)}}$ par $u+k$, ce qui me donne $\frac{Pdu}{\sqrt{2u}\cdot\sqrt{(mu^2-mq^2+pu)}}+\frac{Kdu}{(u+k)\sqrt{mu^2-mq^2+pu}\sqrt{2u}}$, différentielle dont la premiere partie eſt, comme on ſait, dépendante des ſections coniques. A l'égard de la ſeconde, je fais $u+k=x$, ce qui me donnera une transformée de la forme ſuivante $\frac{Kdx}{x\cdot\sqrt{(\epsilon+\alpha x)}\cdot\sqrt{(\alpha'+\epsilon' x+\gamma x x)}}$ qui eſt préciſément la même que la propoſée, & dans laquelle les racines du binome ſont réelles. *C. Q. F. F.*

CCXLIII.

REMARQUE. Donc quand il s'agira dans la ſuite d'une différentielle réductible à la quadrature des courbes du troiſieme ordre, il faudra toujours entendre celles qui ont pour équation $xyy = p + qx + rx^2 + sx^3$, le ſecond membre ayant toutes ſes racines réelles.

CCXLIV.

Différentielle dont l'intégrale dépend de la rectification des ſections coniques & de la quadrature précédente.

THÉOREME I. L'intégrale des différentielles qui ſe rapportent à la ſuivante $\frac{dx}{x^n \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend d'arcs de ſections coniques & de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre.

DÉMONSTRATION. Je prends $\frac{\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}{x^q}$ que je différentie : j'ai $d\left\{\frac{\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}{x^q}\right\} = \frac{b\,dx+2x\,dx+3fx^2\,dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \times \frac{x^q}{x^{2q}} - \frac{qx^{q-1}\,dx}{x^{2q}}\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}$, & réduiſant ces deux membres au même dénominateur, ils deviennent

$$\frac{(b+2cx+3fx^2)\,x^q\,dx - 2qx^{q-1}\,dx\,(a+bx+cx^2+fx^3)}{x^{2q}\cdot 2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} =$$

$$\frac{dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \times \left\{\begin{matrix} bx^{-q} + 2cx^{-q+1} + 3fx^{-q+2} - 2aqx^{-q-1} \\ -2bqx^{-q} - 2cqx^{-q+1} - 2fqx^{-q+2} \end{matrix}\right\};$$

or cette quantité en ordonnant eſt égale à

$$\frac{dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \times \left\{\begin{matrix} -2aqx^{-q-1} - 2bqx^{-q} - 2cqx^{-q+1} - 2fqx^{-q+2} \\ + bx^{-q} + 2cx^{-q+1} + 3fx^{-q+2} \end{matrix}\right\}.$$

En examinant cette différentielle, & donnant à l'indéterminée q différentes valeurs, on trouvera l'intégrale cherchée de la façon ſuivante.

1°. Si on fait $q = 1$, on a $\frac{dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \times (-2ax^{-2} - bx^{-1} + fx) = \frac{a\,dx}{-x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} + \frac{b\,dx}{-2x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} + \frac{f\,x\,dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$.

Donc l'intégrale de $\frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend de celles de $\frac{dx}{2ax\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ & de $\frac{x\,dx}{2a\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$; c'eſt-à-dire (Lemme précédent) de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre, & (Art. CCXXIX.) de la rectification des ſections coniques.

2°. Si on fait $q = 2$, on aura la différentielle ſuivante $\frac{dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \times (-4ax^{-3} - 3bx - 2cx^{-1} - f) = \frac{2a\,dx}{-x^3\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} + \frac{3b\,dx}{-2x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} + \frac{c\,dx}{-x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} + \frac{f\,dx}{-2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$.

Il ſuit de là que l'intégrale de $\frac{dx}{x^3\sqrt{(a+bx+cxx+fx^3)}}$ dépend de $\frac{3b\,dx}{-4ax\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$, de $\frac{c\,dx}{-2ax\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ & de $\frac{f\,dx}{-4a\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$: mais l'intégrale de $\frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend de la rectification des ſections coniques, & de $\frac{b\,dx}{-2ax\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$; donc l'intégrale en queſtion dépend de la rectification des ſections coniques & de $\left\{\frac{3bb}{8aa} - \frac{3c}{4a}\right\} \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$.

D'où l'on conclura que $\frac{dx}{x^3\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ ſe rappo uniquement à la rectification des ſections coniques, tou les fois qu'on a $bb = 2ac$.

En donnant ainſi ſucceſſivement à q différentes valeu on trouvera qu'en général l'intégrale de $\frac{dx}{x^n\sqrt{(a+bx+cx^2+}}$ ſe rapporte à la rectification des ſections coniques, & plus à la quadrature d'un eſpace curviligne du troiſie ordre, excepté les cas cependant où les coeffici a, b, c, f & l'expoſant n ſont tels que la différenti $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ qui exprime cette quadrature, s'e nouit. Car alors la propoſée ſe réduit uniquement à arcs de ſections coniques. *C. Q. F. D.*

Cas dans leſquels l'intégrale cherchée dépend uniquement des arcs de ſections coniques.

CCXLV.

Différentielles qui dépendent de la précédente.

COROLLAIRE 1. Si dans la propoſée b & $c =$ elle deviendra $\frac{dx}{x^n\sqrt{(a+fx^3)}}$. En ce cas elle ſe réd toujours à des arcs de ſections coniques. Car nous av vu qu'elle dépend de $\frac{dx}{x\sqrt{(a+fx^3)}}$. Soit $x^3 = u$; $x =$ $dx = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}du$. Subſtituant on a $\frac{dx}{x\sqrt{(a+fx^3)}}$ $\frac{du}{3u\sqrt{(a+fu)}}$. Je fais à préſent $a+fu = zz$, j'en $du = \frac{2zdz}{f}$; $\sqrt{(a+fu)} = z$: ce qui me donne transformée $\frac{2dz}{3(zz-a)}$, qui eſt comme on voit une ction rationelle. Par conſéquent la propoſée s'integre logarithmes, ou par des arcs de cercle. Donc elle pend de la rectification du cercle ou de la parabole.

CCXL

CCXLVI.

COROLL. 2. Si la propoſée étoit $x^{\pm p}\,dx.\,(a+bxx)^{\pm\frac{n}{3}}$, dans laquelle p & n repréſentaſſent des nombres entiers quelconques, on verroit qu'elle dépend des ſections coniques. En effet faiſons $a+bxx=z^3$, on en tirera $dx=\frac{3z^2dz}{2(bz^3-ab)^{\frac{1}{2}}}$; $x^{\pm p}=\left(\frac{z^3-a}{b}\right)^{\pm\frac{p}{2}}$; la transformée ſera donc $\left(\frac{z^3-a}{b}\right)^{\pm\frac{p}{2}}\times\frac{3z^{2\pm n}dz}{2\sqrt{(bz^3-ab)}}$ à laquelle par conſéquent on pourra donner la forme ſuivante $z^{\pm q}\,dz.\,(e+gz^3)^{\pm\frac{r}{2}}$, q marquant un nombre entier poſitif, & r auſſi un nombre entier poſitif & impair. Maintenant je dis que cette quantité dépend des arcs de ſections coniques, ſoit qu'on ait $+\frac{r}{2}$, ou $-\frac{r}{2}$.

Soit 1°. $z^{\pm q}\,dz.\,(e+gz^3)^{\frac{r}{2}}$; je multiplie haut & bas par $(e+gz^3)^{\frac{1}{2}}$, ce qui me donne $\frac{z^{\pm q}dz.(e+gz^3)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}}{(e+gz^3)^{\frac{1}{2}}}$; & comme r eſt un nombre entier impair, il n'y aura plus de radical au numérateur; par conſéquent on aura une différentielle dont les différens termes ſeront de la forme ſuivante $\frac{z^{\pm h}\,dz}{(e+gz^3)^{\frac{1}{2}}}$, que l'on ſait dépendre des ſections coniques.

2°. Soit $z^{\pm q}\,dz.\,(e+gz^3)^{-\frac{r}{2}}$; pour découvrir quelle eſt l'intégrale de cette quantité, je prends $\frac{z^m}{(a+bz^3)^{\frac{s}{2}}}$

$dz\varphi z = 0$, équation réduite à notre cas général.

CVI.

Application de cette formule à un exemple.

Suppoſons que dans la formule précédente $f = -3$, $n = 2$, $c = 1$, $p = y$, $q = ax$:

L'équation à intégrer ſera $(x^2 dx + ay^8 dy)\, y = (-3x dy + y dx)\, ax$, ou bien $x^2 dx + ay^8 dy - (-3x dy + y dx)\frac{ax}{y} = 0$. Donc la ſuppoſition qu'il faut faire ici eſt $y x^{-\frac{1}{3}} = z$. Faiſant les ſubſtitutions convenables pour y & dy, nous aurons la transformée ſuivante $x^2 dx + ax^3 z^8 dz + \frac{ax^3}{3} z^9 x^2 dx + \frac{3ax^2 dz}{z} = 0$; ou bien $(1 + \frac{a}{3} z^9)\, x^2 dx + ax^3 z^8 dz + \frac{3ax^2 dz}{z} = 0$, équation réduite au cas général.

CVII.

Quatrieme formule.

PROBLEME 4. Séparer les indéterminées dans la formule $ax^n dx + by^m dy + (x dy - y dx) \times \left\{\frac{p}{q} + \frac{\pi}{\omega}\right\} = 0$.

Celle-ci eſt encore plus générale que les précédentes, p & q étant des fonctions homogenes de x & de y, mais de différentes dimenſions, ſi l'on veut, dont la différence ſoit k; & π, ω étant auſſi des fonctions de x & de y homogenes chacunes telles que l'excès du nombre des dimenſions de π ſur celles de ω ſoit $n - 1$.

CCXLVIII.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. En réuniſſant ce que nous venons de dire, & ce que nous avons trouvé (Article CCXXVII.), on verra qu'en général $z^q\,dz \times (e+gz^m)^n$ dépend de la rectification des ſections coniques, m étant $=2$, ou $=3$.

1°. Lorſque $m=2$, q étant égal à la moitié d'un nombre entier poſitif ou négatif, & n étant égal à la moitié ou au tiers d'un nombre entier poſitif ou négatif; ou bien q étant encore égal à un nombre entier poſitif ou négatif, & n égal au quart d'un nombre entier poſitif ou négatif.

2°. Lorſque $m=3$, q & n étant égaux à la moitié d'un nombre entier poſitif ou négatif. (Art. CCXLVI.).

CCXLIX.

D'après cela ſoit cherchée l'intégrale de $z^p\,dz \times (a+bz^r)^s$: je fais $a+bz^r=u^t$, ce qui me donne $dz=\frac{t}{r}u^{t-1}\,dt\times\left\{\frac{u^t-a}{b}\right\}^{\frac{1-r}{r}}$, & $z^p=\left\{\frac{u^t-a}{b}\right\}^{\frac{p}{r}}$; par conſéquent en faiſant ces ſubſtitutions, on a $z^p\,dz\cdot(a+bz^r)^s=\frac{t}{r}u^{ts+t-1}\,dt\cdot\left\{\frac{u^t-a}{b}\right\}^{\frac{p+1-r}{r}}$ quantité réductible à des arcs de ſections coniques; 1°. ſi $t=2$; $2s+1=\pm\frac{n}{2}$, & $\frac{p+1-r}{r}=\pm\frac{q}{2}$, ou $\pm\frac{q}{3}$, n & q exprimant des nombres entiers; 2°. en ſuppoſant

toujours $t=2$, & $2s+1=\pm n$, & $\frac{p+1-r}{r}=\pm\frac{q}{4}$.

3°. ſi $t=3$, & $3s+2=\pm\frac{n}{2}$, & $\frac{p+1-r}{s}=\pm\frac{q}{2}$.

Ce qui eſt évident.

CCL.

Autre différentielle dépendante des arcs de ſections coniques, & de l'aire des courbes du 3e. ordre.

THÉOREME 2. L'intégrale de $(Kx+c)^p\times(f+gx)^{\frac{n}{2}}\times(a+bx+cxx)^{\frac{m}{2}}dx$ (p, n, m exprimant des nombres entiers poſitifs ou négatifs) dépend de la rectification des ſections coniques & de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre.

DÉMONSTRATION. Si ces nombres ſont poſitifs, la propoſée n'a aucune difficulté : on voit aiſément qu'elle ſe réduit à la rectification des ſections coniques.

Si p eſt un nombre entier négatif, faiſons $f+gx=z$, on aura $dx=\frac{dz}{g}$ & après les ſubſtitutions ordinaires, la transformée ſuivante $\left\{\frac{Kz-Kf+gc}{g}\right\}^{-p}\times\frac{z^{\frac{n}{2}}dz}{g}\cdot\left\{\frac{ag^2+bgz-bgf+cz^2-2cfz+cf^2}{gg}\right\}^{\frac{m}{2}}$, & en abregeant l'expreſſion de cette différentielle $\frac{z^{\frac{n}{2}}dz.(zz+oz+q)^{\frac{m}{2}}}{(lz+i)^p}$. Je multiplie haut & bas par $z^{\frac{n}{2}}.(zz+oz+q)^{\frac{m}{2}}$, ce qui me donnera $\frac{z^n dz.(zz+oz+q)^m}{z^{\frac{n}{2}}.(lz+i)^p\times(zz+oz+q)^{\frac{m}{2}}}$. On voit par là que la propoſée ſe change en une différentielle dont chaque terme a la forme ſuivante $\frac{qz^k dz}{(hz+e)^p\times z^{\frac{r}{2}}(\alpha+\beta z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$.

On diviſera dans chacun d'eux z^k par $(hz+e)^p$, tant que cela ſe pourra faire, & chacune des parties du quotient étant multipliée par $\frac{dz}{z^{\frac{r}{2}} \times (\alpha+\epsilon z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$ s'intégrera par des arcs de ſections coniques.

Lorſqu'on ſera parvenu à un reſte dans lequel k ſera $< p$, on multipliera le numérateur & le dénominateur de la propoſée par $z^{\frac{s}{2}}$, ce qui donnera $\frac{qz^k \times z^{\frac{s}{2}} dz}{(hz+e)^p \times z^{\frac{r+s}{2}} \times (\alpha+\epsilon z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$, & en ſuppoſant P & Q des fonctions de x rationelles & ſans diviſeur, on donnera à cette derniere quantité la forme ſuivante, en ſe ſervant des regles expliquées pour les fractions rationelles $\frac{Pdz \cdot z^{\frac{s}{2}}}{(hz+e)^p \cdot (\alpha+\epsilon z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}} +$ $\frac{Qdz \cdot z^{\frac{s}{2}}}{z^{\frac{r+s}{2}} \cdot (\alpha+\epsilon z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$. La ſeconde partie de cette différentielle devient $\frac{Qdz}{z^{\frac{r}{2}} \cdot (\alpha+\epsilon z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$, qui s'integre par des arcs de ſections coniques, comme il eſt aiſé de le voir ſur le champ.

Pour intégrer la premiere $\frac{Pdz \cdot z^{\frac{s}{2}}}{(hz+e)^p \cdot (\alpha+\epsilon z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$, je ſuppoſe $\frac{z}{\alpha+\epsilon z+\delta zz} = y^{-1}$; ce qui donne $zy = \alpha+\epsilon z+\delta zz$, & $zz + \frac{\epsilon z - zy}{\delta} = -\frac{\alpha}{\delta}$; & en tirant la racine quarrée $z + \frac{\epsilon}{2\delta} - \frac{y}{2\delta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta} +$

$\left\{\frac{m+1}{2}\right\} . aby^2 dx = 0$ eſt intégrable dans les mêmes cas que $x^{2m+2} dx + a dz + cz^2 dx = 0$, comme on l'a trouvé déja ci-deſſus dans le Théorême 8. C'eſt ce qui eſt évident en obſervant dans la transformée (X) les conditions que donne la ſuppoſition précédente.

CXXXIV.

SCHOLIE 3. Si l'on fait dans l'équation $x^m dx +$ Dernier cas d'intégration de la formule. $ady + byx^n dx + cyy dx = 0$, ... $n = 0$

s & $t = 1$,

la transformée générale (A) devient (F) $x^m dx + apr x^{r-1} dx + afz dx + afx dz + bp x^r dx + bfxz dx + cpp x^{2r} dx + 2cpf x^{r+1} z dx + cff x^2 z^2 dx = 0$.

CXXXV.

Soit maintenant dans cette derniere équation $bfxz dx + 2cpf x^{r+1} z dx = 0$, on en tire . . $r = 0$

$p = -\frac{b}{2c}$.

Soit auſſi . . . . . $f = 1$.

En effaçant ce qui eſt multiplié par zéro & ce qui ſe détruit dans l'équation (F), on a $x^m dx + az dx + ax dz - \frac{bb}{4c} dx + cx^2 z^2 dx = 0$; & enfin en faiſant $xz = u$, on a $x^m dx + adu - \frac{bb}{4c} dx + cu^2 dx = 0$; ce qui nous donne le Théorême ſuivant.

THÉOREME 12. Si $x^m dx + ady + bydx + cyy dx = 0$ eſt intégrable, (B) $x^m dx - \frac{bb}{4c} dx + adu +$

au numérateur, ce qui eſt indifférent pour la juſteſſe du calcul). p eſt par l'hypotheſe un nombre entier. Si n étoit négatif, je ferois $y = \frac{1}{u}$, ce qui me donneroit après les ſubſtitutions ordinaires $\frac{du \cdot u^{\frac{n}{2}-1+p}}{(K+Hu)^p \times \sqrt{(R+Nu+Mu^2)}}$.

D'où il ſuit qu'on pourra réduire la difficulté à l'intégration de $\frac{y^{\frac{n}{2}} dy}{(H+Ky)^p \cdot \sqrt{(M+Ny+Ryy)}}$, n & p étant des nombres entiers poſitifs.

Pour intégrer maintenant cette différentielle, de laquelle dépend l'intégrale entiere de la propoſée, je ſuppoſe $H + Ky = t$, d'où je tire $y = \frac{t-H}{K}$; $dy = \frac{dt}{K}$; donc on a la transformée ſuivante

$$\frac{\left\{\frac{t-H}{K}\right\}^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{dt}{K}}{t^p \cdot \sqrt{\frac{MK^2 + H^2R - HNK + NKt - 2HRt + Rtt}{K^2}}} =$$

$\frac{(a-bt)^{\frac{n}{2}} \times dt}{t^p \times \sqrt{(a'+b't+ctt)}}$. Cette quantité peut encore être développée en pluſieurs termes tels que $\frac{t^{\pm q}\, dt \times (a-bt)^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{(a'+b't+ctt)}}$. Or 1°. Si q eſt poſitif, l'intégrale n'a aucune difficulté, & dépend de la rectification des ſections coniques. 2°. Si on a $\frac{dt\sqrt{a-bt}}{t^q \sqrt{(a'+b't+ctt)}}$, on multipliera le numérateur & le dénominateur par $(a - bt)^{\frac{r}{2}}$, ce qui donnera deux termes tels que $\frac{dt}{t^r \sqrt{(\alpha + \beta t + \gamma tt + \lambda t^3)}}$ qui dépendent (Art. CCXLIV.) de la quadrature d'un eſpace curviligne

du troiſieme ordre. Donc la propoſée dépend de la rectification des ſections coniques, & de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre. *C. Q. F. D.*

CCLI.

Différentielles qui dépendent de la précédente.

COROLLAIRE. 1. Du Théorême précédent il ſuit qu'on pourra intégrer le produit de $dx.(e+fx)^{\frac{n}{2}}.(g+kx)^{\frac{m}{2}}.(a+bx+cxx)^{\frac{s}{2}}$ (n, m, & s étant des nombres entiers poſitifs ou négatifs) par une fonction rationelle de x, pourvu que le dénominateur de la fonction, ſi c'eſt une fraction, ait toutes ſes racines réelles. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à multiplier la propoſée haut & bas par $(g+kx)^{\frac{n}{2}}$, cette opération donnera $dx.\left\{\frac{e+fx}{g+kx}\right\}^{\frac{n}{2}}.(g+kx)^{\frac{m+n}{2}}\times(a+bx+cxx)^{\frac{s}{2}}$. Soit maintenant $\frac{e+fx}{g+kx}=z$, on en tire $x=\frac{e-gz}{kz-f}$: $dx=\frac{(gf-ek)}{(kz-f)^2}dz$; on aura donc la transformée ſuivante $\frac{(gf-ek)}{(kz-f)^2}z^{\frac{n}{2}}dz.\left\{\frac{ke-fg}{kz-f}\right\}^{\frac{m+n}{2}}\times\frac{(\alpha+\epsilon z+\gamma zz)^{\frac{s}{2}}}{(kz-f)^s}$, qu'on voit bien ſe réduire à $z^{\frac{n}{2}}dz.(\alpha+\epsilon z+\gamma zz)^{\frac{s}{2}}$ multipliée par une fonction rationelle de z, & dépendante par conſéquent du Théorême précédent.

CCLII.

COROLLAIRE 2. Si on avoit une fonction rationelle de x multipliée par $dx\times(a+bx+cxx)^{\pm\frac{m}{2}}\times(e+fx$

+

$+gxx)^{\pm\frac{n}{2}}$, en ſuppoſant toujours que dans cette fonction, ſi elle eſt une fraction, on puiſſe partager le dénominateur en des quantités ſimples $(x+p)^{\delta}$, en multipliant la propoſée haut & bas par $(a+bx+cxx)^{\frac{n}{2}}$, on la développeroit en différens termes de la forme ſuivante $\frac{Kx\,dx}{(lx+n)^{r}\cdot(a+bx+cxx)^{\frac{q+s}{2}}\cdot\left\{\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}\right\}^{\frac{s}{2}}}=$ par les regles des fractions rationelles $\frac{Q\,dx}{(lx+n)^{r}\cdot\left\{\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}\right\}^{\frac{s}{2}}}+\frac{P\,dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q+s}{2}}\cdot\left\{\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}\right\}^{\frac{s}{2}}}$, P & Q étant des fonctions de x rationelles & ſans diviſeur.

Mais ſi on diviſe $e+fx+gxx$ par $a+bx+cxx$, on aura au quotient une partie toute conſtante, & un reſte tel que $\frac{\gamma x+\delta}{a+bx+cxx}$. Je ſuppoſe donc $\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}=\varphi+\frac{\gamma x+\delta}{a+bx+cxx}$, & $\frac{\gamma x+\delta}{a+bx+cxx}=\frac{1}{z}$: cette ſuppoſition me donnera $(\gamma x+\delta)z=a+bx+cxx$, & $xx+\frac{bx}{c}-\frac{\gamma zx}{c}=\frac{\delta z-a}{c}$; d'où on tire $x=\frac{-b+\gamma z}{2c}\pm\sqrt{\frac{\delta z}{c}-\frac{a}{c}+\left\{\frac{b-\gamma z}{2c}\right\}^{2}}$: $dx=\frac{\gamma\,dz}{2c}+\frac{\delta\,dz+\frac{\gamma\gamma z\,dz}{2c}-\frac{b\gamma\,dz}{2c}}{2c\sqrt{\frac{\delta z-a}{c}+\left\{\frac{b-\gamma z}{2c}\right\}^{2}}}$. Subſtituant une des deux valeurs de x dans le premier membre de la propoſée (ce qu'on fera ſur l'un, doit auſſi ſe pratiquer pour l'autre),

x à y, $\frac{1}{z}$ à z dans les équations de condition, ce qui en donnera de nouvelles.

CHAPITRE XV.

Méthode pour intégrer quelques équations différentielles par le moyen des coefficients indéterminés.

CLXXI.

CEtte Méthode eſt utile lorſqu'on a une, deux, trois, quatre, &c. équations à intégrer enſemble, ou lorſqu'on peut regarder une équation différentielle donnée, comme étant formée de pluſieurs autres équations. En général on integre par ſon moyen un nombre quelconque p d'équations différentielles, qui contiennent un nombre $p+1$ de variables t, x, y, z, u, &c. dont la premiere ait ſa différence dt conſtante, & dont les autres x, y, z, u, &c. & leurs différences ne ſont ni mêlées entre elles ni avec x, & y, &c. ni élevées à aucune puiſſance autre que l'unité, mais ſont ſeulement multipliées par des puiſſances convenables de dt. L'intégration n'auroit même aucune difficulté de plus, ſi dans chacune de ces équations il y avoit un terme quelconque compoſé comme on voudroit de t, de dt & de conſtantes.

Cas dans leſquels on peut ſe ſervir de cette Méthode.

Voici le procédé que nous fait ſuivre cette méthode.

*

$\frac{dz}{z\sqrt{Mz+\frac{A}{\varphi}\times\sqrt{(\alpha+\beta z+\gamma zz)}}}$, dans laquelle M eſt quelconque & α eſt poſitif.

DÉMONST. Soit pour le prouver $\frac{du}{u\sqrt{\varphi+\frac{u}{m}}\cdot\sqrt{A+Bu-uu}}$ = (en multipliant haut & bas par φ) $\frac{\varphi\,du}{\varphi u\sqrt{(\varphi+\frac{u}{m})}\cdot\sqrt{(A+Bu-uu)}}$, ſi à cette quantité on ajoute $\frac{\frac{u}{m}du}{\varphi u\sqrt{(\varphi+\frac{u}{m})}\cdot\sqrt{(\varphi A+Bu-uu)}}$, & qu'on l'en retranche en même temps, ce qui, comme on voit, ne la changera pas, elle deviendra $\frac{\varphi\,du+\frac{u}{m}du}{\varphi u\sqrt{(\varphi+\frac{u}{m})}\cdot\sqrt{(A+Bu-uu)}}$ $-\frac{\frac{u}{m}du}{\varphi u\sqrt{(\varphi+\frac{u}{m})}\cdot\sqrt{(A+Bu-uu)}}$ = (en réduiſant) $\frac{du\sqrt{(\varphi+\frac{u}{m})}}{\varphi u\cdot\sqrt{(A+Bu-uu)}}-\frac{du}{m\varphi\cdot\sqrt{(\varphi+\frac{u}{m})}\cdot\sqrt{(A+Bu-uu)}}$.

La ſeconde partie de cette différentielle s'integre par des arcs de ſections coniques. Pour voir ce que devient la premiere je ſuppoſe $\frac{\varphi+\frac{u}{m}}{A+Bu-uu}=\frac{1}{Mz+\frac{A}{\varphi}}=\frac{1}{Mz+N}$, en faiſant $\frac{A}{\varphi}=N$; on aura $A+Bu-uu=\varphi Mz+\frac{Muz}{m}+N\varphi+\frac{uN}{m}$; donc $A-\varphi Mz-N\varphi=uu-Bu+\frac{Mzu}{m}+\frac{Nu}{m}$, & achevant le quarré du ſecond membre, & prenant la racine quarrée des deux, on a $u-\frac{B}{2}+$

$$\frac{Mz+N}{2m} = \pm\sqrt{A - \varphi Mz - N\varphi + \left(\frac{Mz+N-Bm}{2m}\right)^2}$$

$$= \pm\sqrt{\left(A - \varphi Mz - \frac{A\varphi}{\varphi} + \frac{M^2z^2 - 2BMmz + 2MNz + B^2m^2 - 2BmN + N^2}{4mm}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\left\{\frac{M^2z^2}{4m^2} - \varphi Mz + \left(\frac{2N-2Bm}{4m^2}\right)Mz + \left(\frac{N-Bm}{2m}\right)^2\right\}}$$: donc enfin on trouve $u = \frac{B}{2} \frac{-Mz-N}{2m}$

$$\pm\sqrt{\left\{\frac{M^2z^2 + (2N-2Bm)Mz - 4\varphi Mm^2z + (N-Bm)^2}{4m^2}\right\}} : du =$$

$$-\frac{Mdz}{2m} \pm \frac{(M^2zdz + NMdz - BMmdz - 2\varphi Mm^2dz)}{2m\sqrt{M^2z^2 + (2N-2Bm)Mz - 4\varphi m^2Mz + (N-Bm)^2}}.$$

Subſtituant dans la propoſée une des deux valeurs de u, & multipliant le haut & le bas par l'autre valeur de u, comme on l'a déja pratiqué, Art. CCLII. on aura une transformée qui ſe réduit à des arcs de ſections coniques & à l'intégration de $\frac{dz}{z\sqrt{Mz+N}\cdot\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma zz}}$, M étant de ſigne quelconque, & α poſitif. *C. Q. F. D.*

CCLV.

SECONDE PROPOSITION. $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}\cdot(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$ s'integre par des arcs de ſections coniques, lorſque $a+bx+cxx$ a ſes racines réelles, ou ce qui eſt la même choſe, lorſque bb eſt $> 4ac$. Car ſoient les deux facteurs réels de cette quantité $mx+n$, $rx+p$, on aura $\frac{dx}{\{(mx+n)\cdot(rx+p)\}^{\frac{q}{2}}\cdot(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$. Soit $mx+n=z$, on en tire $dx = \frac{dz}{m}$; $x = \frac{z-n}{m}$, donc on a la

transformée $\frac{\frac{dz}{m}}{z^{\frac{q}{2}} \cdot \left\{\frac{rz-rn+pm}{m}\right\}^{\frac{q}{2}} \cdot \left\{\frac{em^2+fmz-fmn+gz^2-2gnz+gn^2}{mm}\right\}^{\frac{s}{2}}}$:

faisons $z = \frac{1}{u}$, $dz = -\frac{du}{uu}$, on trouvera

$$\frac{-\frac{du}{muu}}{\frac{1}{u^{\frac{q}{2}}} \cdot \left\{\frac{r-rnu+pmu}{mu^{\frac{q}{2}}}\right\}^{\frac{q}{2}} \cdot \frac{(em^2u^2+mfu-fmnu^2+g-2gnu+gn^2u^2)^{\frac{s}{2}}}{m^s u^s}}$$

$$= \frac{u^{q+s-2}\,du}{(Au+B)^{\frac{q}{2}} \cdot (C+Du+Euu)^{\frac{s}{2}}},$$ différentielle réductible aux sections coniques. (Art. CCXXXVI.).

CCLVI.

TROISIEME PROPOSITION. Dans la même hypothese, si on écrit la proposée ainsi $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q+s}{2}} \cdot \left\{\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}\right\}^{\frac{s}{2}}}$, on trouvera qu'elle se rapporte à la rectification des sections coniques, & à l'intégration de la différentielle $\frac{du}{u\sqrt{\left(\varphi+\frac{u}{m}\right)} \cdot \sqrt{(A+Bu+uu)}}$. Car soit $\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}$ $= \varphi + \frac{\gamma x+\delta}{a+bx+cxx}$, & $\frac{\gamma x+\delta}{a+bx+cxx} = \frac{u}{m}$, on en tire $a+bx+cxx = \frac{\gamma mx+\delta m}{u}$, donc $x = -\frac{b}{2c} + \frac{\gamma m}{2cu} \pm \sqrt{\left\{\frac{\delta m}{cu} - \frac{a}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{b\gamma m}{2ccu} + \frac{\gamma^2 m^2}{4c^2u^2}\right\}} = -\frac{b}{2c} + \frac{\gamma m}{2cu} \pm \frac{1}{2cu}\sqrt{(4c\delta mu - 4acu^2 + bbu^2 - 2b\gamma mu + \gamma^2 m^2)}$; donc enfin $x = \frac{-bu+\gamma m}{2cu} \pm \frac{1}{2cu}\sqrt{\frac{\gamma^2 m^2}{bb-4ac} + \frac{4c\delta mu - 2b\gamma mu}{bb-4ac} + uu}$.

D'ailleurs on aura $\frac{dx}{\cdot\left\{\frac{\gamma x m + \delta m}{u}\right\}^{\frac{q+s}{2}} \cdot \left\{\varphi + \frac{u}{m}\right\}^{\frac{s}{2}}}$ qu'on trouvera par la méthode de l'Article CCLII. dépendre de la rectification des ſections coniques & de l'intégration de la différentielle ſuivante, $\frac{du}{u\sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma^2 m^2 + 4c\delta m u - 2b\gamma m u}{bb - 4ac} + uu}}$. Donc il eſt évident que la propoſée $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}} \cdot (e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$ dépend de la rectification des ſections coniques, & de l'intégration de $\frac{du}{u\sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu + uu}}$. Donc puiſque (Prop. Sec.) $\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{q}{2}} \cdot (e+fx+gx^2)^{\frac{s}{2}}}$ dépend dans le cas préſent des ſections coniques, il s'enſuit, ou que le coefficient de $\frac{du}{u\sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu + uu}}$ eſt $= 0$, tous les termes ſe détruiſant dans ce coefficient, ou bien que ſi ce coefficient n'eſt pas $= 0$, $\frac{du}{u\sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu + uu}}$ dépendra de la rectification des ſections coniques, excepté peut-être un ſeul cas particulier, dans lequel le coefficient de cette différentielle ſeroit égal à zéro, en vertu d'un certain rapport entre a, b, c, e, f, g.

COROLLAIRE. Donc ſi tous les termes ne ſe détruiſent pas dans le coefficient de (A)

$\frac{du}{u\sqrt{\varphi+\frac{u}{m}}\cdot\sqrt{\left\{\frac{\gamma^2m^2+4c\delta mu-2b\gamma mu}{bb-4ac}+uu\right\}}}$, il s'enſuit que $(B)\ \frac{du}{u\sqrt{\varphi+\frac{u}{m}}\cdot\sqrt{\alpha+\epsilon u+uu}}$ dépendra toujours de la rectification des ſections coniques, en prenant b, a, c à volonté, pourvu que bb ſoit $> 4ac$. Car cette derniere différentielle peut toujours ſe réduire à la premiere. En effet on a $e+fx+gxx = (a+bx+cxx) \times \frac{g}{c} - \frac{gbx}{c} + fx - \frac{ga}{c} + e$. Donc à cauſe de $\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx} = \varphi + \frac{\gamma x+\delta}{a+bx+cxx}$, on aura $\varphi = \frac{g}{c}$; $\gamma = -\frac{gb}{c}+f$; $\delta = -\frac{ga}{c}+e$. D'ailleurs en comparant les différentielles (A) & (B), on trouve $\alpha = \frac{\gamma^2m^2}{bb-4ac}$, donc $\gamma^2m^2 = \alpha \times (bb-4ac)$, ou $\gamma = \frac{\sqrt{\alpha(bb-4ac)}}{m} = -\frac{gb}{c}+f$; $\epsilon = \frac{4c\delta m-2b\gamma m}{bb-4ac}$, d'où l'on tire $4c\delta m = (bb-4ac)\epsilon + 2b\gamma m$: donc $\delta = \frac{(bb-4ac)}{4cm}\epsilon + \frac{b\gamma}{2c} = -\frac{ga}{c}+e$.

Il ne pourroit tout au plus y avoir d'excepté qu'un cas où $\frac{du}{u\sqrt{\varphi+\frac{u}{m}}\cdot\sqrt{\alpha+\epsilon u+uu}}$ ne dépendroit pas de la rectification des ſections coniques ; ce ſeroit celui dans lequel il y auroit une certaine équation entre a, b, c, e, f, g, ou ce qui eſt la même choſe entre $\varphi, m, \alpha, \epsilon$: mais dans tous les autres cas l'intégration réuſſira.

CCLVII.

QUATRIEME PROPOSITION. Si $a + bx + cxx$ a ſes racines imaginaires, on trouvera que la propoſée $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{1}{2}} \cdot (e+fx+gx^2)^{\frac{3}{2}}}$ dépend de la rectification des ſections coniques & de l'intégration de $\frac{du}{u\sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma^2 m^2}{bb-4ac} - \frac{2b\gamma mu + 4c\delta mu}{bb-4ac} - uu}}$.

Car $a + bx + cxx$ a ſes racines imaginaires dans le cas de $bb < 4ac$; il faudra donc écrire alors $-uu.(4ac - bb)$; ce qui donnera $\frac{du}{u\sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{\left\{\frac{\gamma^2 m^2 - 2b\gamma mu + 4c\delta mu}{4ac-bb} - uu\right\}}}$ différentielle qui eſt la même que la ſuivante $\frac{du}{u\sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{A + Bu - uu}}$.

Or 1°. ſi le coefficient de cette différentielle s'évanouit, ce ſera une marque que la propoſée dépend uniquement des ſections coniques.

2°. Si les termes ne ſe détruiſent pas dans ce coefficient, c'eſt une marque certaine qu'ils ne ſe détruiſent pas non plus dans le cas de la troiſieme Propoſition. Car ces deux cas ſont préciſément les mêmes, on n'a fait que mettre $4ac - bb$ pour $bb - 4ac$. Donc dans cette ſuppoſition on peut conclure que toute différentielle $\frac{du}{u\sqrt{\varphi + \frac{u}{m}} \cdot \sqrt{\alpha + \beta u + uu}}$ s'intégrera par des arcs de

ſections

ſections coniques, au moins quand il n'y aura pas entre les coefficiens α, ϵ, m, φ une certaine équation. Or il eſt toujours poſſible d'empêcher que cette équation n'ait lieu ; car $\frac{du}{u\sqrt{\varphi+\frac{u}{m}}\cdot\sqrt{A+Bu-uu}}$ ſe réduit (I. Prop.) à l'intégration de $\frac{dz}{z\sqrt{Mz+\frac{A}{\varphi}}\cdot\sqrt{\alpha+\epsilon z+zz}}$, dans laquelle $\alpha = \frac{(N-Bm)^2}{2mm}$; $\epsilon = \frac{2N-Bm-\varphi}{M}$. Donc puiſque M eſt indéterminée, il s'enſuit qu'on peut la ſuppoſer telle que l'équation dont il s'agit n'ait pas lieu. Donc il eſt évident que $\frac{dz}{z\sqrt{Mz+\frac{A}{\varphi}}\cdot\sqrt{\alpha+\epsilon z+\gamma zz}}$ dépendra de la rectification des ſections coniques; donc auſſi $\frac{du}{u\sqrt{\varphi+\frac{u}{m}}\cdot\sqrt{A+Bu-uu}}$; donc auſſi $\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{q}{2}}\cdot(e+fx+gx^2)^{\frac{s}{2}}}$ lorſque $a+bx+cx^2$ a ſes racines imaginaires. Mais nous avons vu (Prop. II.) que cette même différentielle dépend auſſi de la rectification des ſections coniques, quand $a+bx+cxx$ a ſes racines réelles ; donc en général toute différentielle $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}\cdot(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$ ſe réduit uniquement à la rectification des ſections coniques. *C. Q. F. D.*

$v = \frac{D}{C-L}$. La prenant en moins je trouve $v = \frac{L-C}{2K} - \frac{C-L}{2K} - \frac{D}{C-L}$. Or les deux premiers termes de cette valeur étant infinis, je puis négliger le troiſieme. J'aurai donc pour ſeconde valeur de v, $v = \frac{L-C}{K}$.

On aura donc $u = ge^{-Ct}$; $u' = g'e^{-Lt}$; $y = K\left\{\frac{u-u'}{C-L}\right\}$; $x = u - \frac{pu'}{p'} = u + \frac{DKu'}{(C-L)^2}$.

3°. Si les valeurs de p & de p' ſont égales, je ſuppoſerai $p = a + \alpha$, $p' = a - \alpha$ (α eſt une quantité infiniment petite.) J'ai donc $u = ge^{-(C+K\alpha+Ka)t}$. Or α étant une quantité infiniment petite peut être regardée comme une différentielle. Mais nous avons vu (Art. CLXXIV.) que ſi on avoit C^{x+dx}, on pouvoit lui donner la forme ſuivante $C^x + C^x\,dx$. Donc on aura par la même raiſon $u = ge^{-(C+Ka)t} - Kg\alpha te^{-(C+Ka)t}$. On trouvera de même $u' = g'e^{-(C+Ka)t} + Kg\alpha te^{-(C+Ka)t}$. On aura auſſi $y = \frac{u-u'}{2\alpha}$; $x = \frac{au-\alpha u-au'-\alpha u'}{2\alpha}$. Donc en mettant pour u & u' leurs valeurs, & ſuppoſant $g = g'$, on a $y = -Kgte^{-(C+Ka)t}$, & $x = -Kgte^{-(C+Ka)t}$.

CLXXX.

COROLLAIRE. Le Problême s'étendra très-facilement à deux équations qui contiendront deux indéterminées x & y multipliées par des conſtantes & par une fonction quelconque de t, avec leurs différences auſſi multipliées par des conſtantes & par une fonction de t, & de plus un terme $t\,dt$, $\theta\,dt$ qui ne renferme que des

aura plus que des eſpaces rectilignes à ajouter ou à ſouſtraire pour avoir l'aire rapportée aux coordonnées primitives, comme nous l'avons prouvé Art. CCXXXIX. Toute la difficulté ſe réduit donc à trouver l'intégrale de ydx, dans les quatre équations de M. Newton.

La premiere donne $y = \frac{e}{2x} \pm \frac{1}{2x} \sqrt{(ax^4 + bx^3 + cx^2 + fx + ee)}$; donc $ydx = \frac{edx}{2x} \pm \frac{dx}{2x} \sqrt{(ax^4 + bx^3 + cx^2 + fx + ee)}$ qui s'integre par l'Art. CCLII.

La deuxieme & la quatrieme donnent $ydx = \frac{dx}{x} \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + f)$, & $ydx = dx(ax^3 + bx^2 + cx + f)$, qui s'integrent tout de ſuite par la regle fondamentale.

La troiſieme enfin donne $ydx = dx\sqrt{(ax^3 + bx^2 + ex + f)}$, qui s'intégre par des arcs de ſections coniques, ainſi que nous l'avons vu pluſieurs fois.

Donc toutes les lignes du troiſieme ordre ſont quarrables ou abſolument ou par logarithmes, ou par des arcs de ſections coniques, ou par la quadrature de la courbe dont l'équation eſt $xyy = a + bx + cxx + fx^3$, le ſecond membre ayant toutes ſes racines réelles. (Art. CCXLIII.).

CCLX.

REMARQUE 1. Nous venons de dire, que ydx étoit l'élément de l'aire de toute courbe du troiſieme ordre rapportée à l'une des quatre équations générales. Cependant il faut obſerver que ſouvent les coordonnées de ces courbes ne ſont pas rectangles. Alors l'élément

de l'aire n'eſt pas ydx, mais ydx multipliée par le rapport du ſinus de l'angle des coordonnées au ſinus total; & comme ce rapport eſt une quantité conſtante, l'intégration n'en devient pas plus difficile.

CCLXI.

REMARQUE 2. Toutes les différentielles dont nous avons recherché l'intégration dans l'article des fractions rationelles, dans celui de la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole, & enfin dans ce dernier ci, s'intégreroient par les mêmes méthodes ſi on y mettoit x^n pour x, & $nx^{n-1}dx$ pour dx.

CHAPITRE XVIII.

De la quadrature des courbes dont les équations ont trois termes.

CCLXII.

Formule générale des équations qui contiennent trois termes.

SOit l'équation à trois termes $Ay^{\alpha}x^{q} + By^{r}x^{p} + Cy^{\omega}x^{s} = 0$ (A, B, C repréſentent des coefficiens quelconques) on propoſe de trouver l'aire $\int ydx$ de la courbe à laquelle appartient cette équation.

Je diviſe l'équation par $x^{q}y^{\omega}$, ce qui la change en $Ay^{\alpha-\omega} + By^{r-\omega}x^{p-q} + Cx^{s-q} = 0$, & en faiſant

$$\alpha - \omega = \lambda$$
$$r - \omega = \mu$$
$$p - q = \sigma$$
$$s - q = \tau$$

on aura . . . . . $Ay^{\lambda} + By^{\mu} x^{\sigma} + Cx^{\tau} = 0$.

Cette équation repréſentera donc toutes les équations poſſibles à trois termes.

Je ſuppoſe à préſent $y = x^{r} u$ (r & u ſont indéterminées). J'aurai . . . . . $y^{\lambda} = x^{r\lambda} u^{\lambda}$

$$y^{\mu} = x^{r\mu} u^{\mu}.$$

Transformation néceſſaire pour préparer l'équation ; $y = x^{r} u$.

Donc on aura la transformée ſuivante $Ax^{r\lambda} u^{\lambda} + Bx^{r\mu+\sigma} u^{\mu} + Cx^{\tau} = 0$. Je diviſe par x^{τ}, & j'ai $Ax^{r\lambda-\tau} u^{\lambda} + Bx^{r\mu+\sigma-\tau} u^{\mu} + C = 0$. La même ſuppoſition de $y = x^{r} u$, nous donne $y\,dx = x^{r} u\,dx$. Donc ſi de l'équation précédente on peut tirer la valeur de x en u, on aura celle de $y\,dx$ en u & en du. Or on trouve la valeur de x en u dans tous les cas ſuivans.

CCLXIII.

Il eſt évident que, ſi $r\lambda - \tau = 0$, il n'y aura plus qu'un terme qui contiendra x & u, & qu'ainſi en diviſant par une puiſſance de u, on aura la valeur cherchée. Il en ſera de même, ſi $r\mu + \sigma - \tau = 0$. On la trouvera auſſi fort aiſément, ſi $r\lambda - \tau = r\mu + \sigma - \tau$; car alors on n'aura à réſoudre qu'une équation fort ſimple du premier degré. Enfin on la trouvera encore, ſi $r\lambda - \tau$ eſt le double ou la moitié de $r\mu + \sigma - \tau$, puiſqu'il ne s'agira dans ce cas que de réſoudre une équation ordinaire du ſecond degré.

Cas dans leſquels on trouve la valeur de x en u.

CCLXIV.

Ils ſont au nombre de cinq pour les équations à trois termes.

Voilà donc cinq cas dans leſquels on aura la valeur de x en u, en donnant à l'indéterminée r une des valeurs contenues dans les cinq équations ſuivantes.

1°. $r\lambda - \tau = 0$

2°. $r\mu + \sigma - \tau = 0$

3°. $r\lambda - \tau = r\mu + \sigma - \tau$

4°. $r\lambda - \tau = 2(r\mu + \sigma - \tau)$

5°. $r\lambda - \tau = \frac{1}{2}(r\mu + \sigma - \tau)$.

Comme nous n'avons à la fois qu'une ſeule équation de condition, la valeur de r ſe préſentera tout de ſuite. D'où il ſuit qu'on peut toujours réduire la quadrature d'une courbe dont l'équation a trois termes à l'intégration d'une quantité $x^r u dx$, dans laquelle on aura la valeur de x en u.

CCLXV.

Examen d'un de ces cinq cas précédens.

Pour le mieux faire ſentir, nous allons détailler un des cinq cas précédens. Soit $r\lambda - \tau = 0$,

on en tire . . . . . $r = \frac{\tau}{\lambda}$.

Donc $Ax^{r\lambda - \tau} u^{\lambda} + Bx^{r\mu + \sigma - \tau} u^{\mu} + C = 0$

devient $Au^{\lambda} + Bx^{\frac{\tau}{\lambda}\mu + \sigma - \tau} u^{\mu} + C = 0$; donc

$x^{\frac{\tau\mu}{\lambda} + \sigma - \tau} = \frac{-Au^{\lambda-\mu} - Cu^{-\mu}}{B}$, ou $x = -$

$\left\{\frac{Au^{\lambda-\mu} + Cu^{-\mu}}{B}\right\}^{\frac{1}{\frac{\tau\mu}{\lambda} + \sigma - \tau}}$; donc $dx =$

$\left\{\frac{\lambda}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda}\right\} \times - \left\{\frac{Au^{\lambda-\mu} + Cu_{-\mu}}{B}\right\}^{\frac{\lambda}{\tau\mu + \sigma\lambda - \tau\lambda} - 1} \times$

$\left\{\frac{\overline{\lambda-\mu}\cdot Au^{\lambda-\mu-1}du-\mu Cu^{-\mu-1}du}{B}\right\}$, & $x^r = -\left\{\frac{Au^{\lambda-\mu}+Cu^{-\mu}}{B}\right\}^{\frac{\tau}{\tau\mu+\sigma\lambda-\tau\lambda}}$. Faiſant ces différentes ſubſtitutions, on aura $\int x^r u\,dx = \frac{\lambda}{\tau\mu+\sigma\lambda-\tau\lambda} \times \left\{\frac{-Cu^{-\mu}-Au^{\lambda-\mu}}{B}\right\}^{\frac{\lambda+\tau}{\tau\mu+\sigma\lambda-\tau\lambda}-1} \times \left(-\frac{\mu Cu^{-\mu}du}{B} + \frac{\overline{\lambda A-\mu A}}{B}\cdot u^{\lambda-\mu}du\right) = \left\{\frac{\lambda}{\tau\mu+\sigma\lambda-\tau\lambda}\right\} \times \frac{C\mu}{B} u^{\frac{-\tau\mu-\lambda\mu}{\tau\mu+\sigma\lambda-\tau\lambda}}du \times \left\{\frac{-C-Au^{\lambda}}{B}\right\}^{\frac{\tau+\lambda}{\tau\mu+\sigma\lambda-\tau\lambda}-2} + \left\{\frac{\lambda}{\tau\mu+\sigma\lambda-\tau\lambda}\right\} \times \frac{\overline{-\mu A+\lambda A}}{B}\cdot u^{\frac{-\tau\mu-\lambda\mu}{\tau\mu+\sigma\lambda-\tau\lambda}}du \times \left\{\frac{-C-Au^{\lambda}}{B}\right\}^{\frac{\tau+\lambda}{\tau\mu+\sigma\lambda-\tau\lambda}-1}$. Or cette équation, comme on le voit, contient deux membres qui peuvent ſe repréſenter chacun en particulier par $u^m du\,.\,(a+bu^n)^p$.

CCLXVI.

Recherche des cas dans leſquels la courbe de l'équation à trois termes eſt quarrable.

Pour trouver maintenant les cas dans leſquels la courbe eſt quarrable, il faut ſe rappeller ceux dans leſquels $u^m du(a+bu^n)^p$ eſt intégrable.

1°. $u^m du\,.\,(a+bu^n)^p$ eſt intégrable (Art. XI.) toutes les fois que p eſt un nombre entier poſitif, n étant tout ce qu'on voudra. Il faut cependant en excepter un cas; c'eſt celui dans lequel $\frac{m+1}{-n}$ eſt égal à un nombre entier poſitif, ou eſt plus petit que p. Alors nous avons démontré (Scholie Art. XII. & XIII.) qu'un

des termes contenoit une différentielle logarithmique. Donc la différentielle dépend alors de la quadrature de l'hyperbole.

2°. La même différentielle s'integre (Art. LXXIX.) ſi $\frac{m+1}{n}$ eſt égal à un nombre entier poſitif, à moins que p ne ſoit égal à un nombre entier négatif plus petit que $\frac{m+1}{n}$. Dans ce cas (Art. LXXXIII.) il y aura un terme intégrable par logarithmes.

3°. Cette même différentielle s'intégrera (Art. LXXIX.) toutes les fois que $\frac{m+1}{n} - p$ eſt un nombre entier poſitif. Il faut cependant en excepter auſſi un cas ; c'eſt celui dans lequel p eſt égal à un nombre entier négatif. Car dans ce cas on a prouvé (Art. LXXXVI.) que l'intégrale de quelqu'un des termes dépend de la quadrature de l'hyperbole.

CCLXVII.

Examen de ceux dans leſquels l'intégrale dépend de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole,

Cherchons à préſent les cas dans leſquels la formule des équations à trois termes peut s'intégrer par la quadrature du cercle ou de l'hyperbole : nous avons déja vu ceux dans leſquels p étant un nombre entier poſitif, elle dépend de la quadrature de l'hyperbole.

1°. $u^m du . (a + bu^n)^p$ eſt réductible en fractions rationelles, ſi p eſt un nombre entier négatif, m & n étant fractionaires. On ſait que l'intégrale de $\frac{u^m du}{(a+bu^n)^p}$ dépend

dépend de celle de $\frac{u^m\,du}{a+bu^n}$. Or ſoit $m=\frac{q}{p}$, & $n=\frac{r}{s}$, on a $\frac{u^m\,du}{a+bu^n}=\frac{u^{\frac{q}{p}}\,du}{a+bu^{\frac{r}{s}}}$. Je fais $u^{\frac{1}{s}}=z$, j'aurai $u=z^s$; $du=sz^{s-1}\,dz$; $u^{\frac{q}{p}}=z^{\frac{qs}{p}}$: donc on aura la transformée ſuivante $\frac{sz^{\frac{qs}{p}+s-1}\,dz}{a+bz^r}$. Soit encore $z^{\frac{1}{p}}=y$; on a $z=y^p$; $dz=py^{p-1}\,dy$; donc la transformée ſera $\frac{psy^{qs+ps-1}\,dy}{a+by^{pr}}$, quantité qui eſt une ſimple fraction rationnelle, p, r, q, s étant des nombres entiers; & par conſéquent intégrable par les méthodes que nous avons données pour ces fractions.

2°. $u^m\,du.(a+bu^n)^{\frac{p}{}}$ eſt intégrable par la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, lorſque $\frac{m+1}{n}-1$ eſt égal à un nombre entier négatif, quel que ſoit p. Pour s'en convaincre il n'y a qu'à faire $u^n=z$, on aura $u=z^{\frac{1}{n}}$; $du=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}\,dz$; $u^m=z^{\frac{m}{n}}$. Donc $u^m\,du.(a+bu^n)^{\frac{p}{}}=\frac{1}{n}z^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1}\,dz.(a+bz)^{\frac{p}{}}$. Je fais enſuite $a+bz=t$; $z=\frac{t-a}{b}$; $dz=\frac{dt}{b}$; $z^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1}=\left\{\frac{t-a}{b}\right\}^{\frac{m+1}{n}-1}$; ce qui donne en faiſant les ſubſtitutions, $\left\{\frac{t-a}{b}\right\}^{\frac{m+1}{n}-1}\cdot\frac{t^p\,dt}{b^n}$, quantité que je dis être une fraction rationelle

CLXXXVII.

REMARQUE. Il n'y auroit aucune difficulté pour l'intégration, quand même $\sqrt{n}$ ſeroit imaginaire. Car ſi α & ϵ doivent être réelles, nous avons appris dans l'Introduction à en faire évanouir les imaginaires.

CLXXXVIII.

PROBLEME 4. Soient encore les deux différentielles plus générales que les précédentes

Quatrieme exemple qui renferme les trois autres.

$$\alpha ds + \epsilon du$$

&

$$p\alpha du + p\epsilon du + r\epsilon ds + m\alpha ds + dt\,\Delta(u,s) + ds\,\Gamma(u,s)$$

qui doivent être l'une & l'autre une différentielle exacte, trouver α & ϵ.

SOLUTION. Soit . . . . $ku + rs = gy$

& . . . . . $fu + \delta s = ht$,

k, r, g, f, δ, h ſont des conſtantes indéterminées; on aura . . . . . $s = \frac{gfy - hkt}{fr - \delta k}$

& . . . . . $u = \frac{hrt - \delta gy}{fr - \delta k}$;

ou en changeant les ſignes $u = \frac{\delta gy - hrt}{\delta k - fr}$.

On aura par conſéquent $ds = \frac{fgdy - hkdt}{fr - \delta k}$; $du = \frac{\delta gdy - hrdt}{\delta k - fr}$.

Soit . . . . . $\frac{fg}{fr - \delta k} = \lambda$

$\frac{-hk}{fr - \delta k} = \varphi$

$\frac{\delta g}{\delta k - fr} = \mu$

$\frac{-hr}{\delta k - fr} = \upsilon$

entier négatif, & ſi p eſt un nombre entier. Mais ſi p exprime un nombre rompu, alors on reduira la propoſée en fraction rationelle, en ſuivant le calcul de l'article précédent.

4°. Si on fait $u^n = t$, on aura après les ſubſtitutions ordinaires $t^{\frac{m+1}{n}-1} dt.(a+bt)^p$ pour transformée; laquelle en ſuppoſant $p = \frac{q}{2}$, & $\frac{m+1}{n} - 1 = \frac{r}{2}$ (q & r étant des nombres entiers impairs poſitifs ou négatifs) devient $t^{\frac{r}{2}} dt.(a+bt)^{\frac{q}{2}}$.

Pour la réduire en fraction rationelle, ſuppoſé que q ſoit un nombre poſitif, je la multiplie haut & bas par $(a+bt)^{\frac{q}{2}}$, ce qui me donne $\frac{t^{\frac{r}{2}} dt.(a+bt)^q}{(a+bt)^{\frac{q}{2}}}$, différentielle aiſément réductible en fraction rationelle, Art. CLXXXVIII.

5°. La même choſe aura encore lieu ſi $p = \frac{q}{2}$ & $\frac{m+1}{-n} - p - 1 = \frac{r}{2}$; ce qu'il eſt aiſé de voir en appliquant le calcul de l'article précédent à $\left\{\frac{b-s}{a}\right\}^{\frac{m+1}{-n}-p-1} \cdot \frac{s^p ds}{an}$.

6°. Soit enfin dans la propoſée $u^m du.(a+bu^n)^p$, $u^n = t^2$, on aura la transformée ſuivante $t^{\frac{2m+2}{n}-1} dt.(a+bt^2)^p$, dépendante des fractions rationelles, toutes les fois que $p = \frac{q}{2}$, & $\frac{2m+2}{n} - 1 = r$, r étant un nombre entier pair ou impair, poſitif ou négatif. Car on a $t^r dt.(a+bt^2)^{\frac{q}{2}}$. Soit dans cette quantité $tt = z$,

ces équations on tire $(1+mn)\varphi = -\rho v n$; ou $\frac{\varphi}{v} = \frac{-\rho n}{1+mn}$; & encore $(1+pn)v = -\gamma\varphi n$, ou $\frac{\varphi}{v} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$. Donc $\frac{-\rho n}{1+mn} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$; & par conſéquent pour trouver n on aura la même équation qu'auparavant.

Je la réſous cette équation $\frac{-\rho n}{1+mn} = \frac{1+pn}{-\gamma n}$; j'aurai $n^2 - \frac{(m+p)n}{\gamma\rho - mp} = \frac{1}{\gamma\rho - mp}$. Donc $n - \frac{(m+p)}{2.(\gamma\rho - mp)} = \pm\sqrt{\frac{1}{\gamma\rho - mp} + \frac{(m+p^2)}{4.(\gamma\rho - mp)^2}}$. Donc enfin $n = \frac{m+p}{2(\gamma\rho - mp)} \pm \frac{\sqrt{[4\gamma\rho + (m-p)^2]}}{2(\gamma\rho - mp)}$; & ce ſont-là les deux valeurs de n.

Je multiplie la ſeconde différentielle transformée, 1°. par une des deux valeurs de n, enſuite par l'autre ; j'aurai les deux équations ſuivantes : la premiere $(\rho\alpha\mu + p\epsilon\mu + \gamma\epsilon\lambda + m\alpha\lambda) \times \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy + \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy\Delta y, t + (\rho\alpha v + p\epsilon v + \gamma\epsilon\varphi + m\alpha\varphi) \times \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt + \left\{\frac{m+p+\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt + y, t.$

La ſeconde ſera $(\rho\alpha\mu + p\epsilon\mu + \gamma\epsilon\lambda + m\alpha\lambda) \times \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy + \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dy\Delta y, t + (\rho\alpha v + p\epsilon v + \gamma\epsilon\varphi + m\alpha\varphi) \cdot \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt + \left\{\frac{m+p-\sqrt{4\gamma\rho+(m-p)^2}}{2.(\gamma\rho - mp)}\right\} dt + y, t.$

A ces deux différentielles j'ajoute la premiere différentielle transformée $(\alpha\lambda + \epsilon\mu)\,dy + (\alpha\varphi + \epsilon v)\,dt$, à laquelle je donne la forme ſuivante $\left(\frac{\alpha\lambda}{\mu} + \epsilon\right)\mu\,dy + \left(\frac{\alpha\varphi}{v} + \epsilon\right)v\,dt$, j'aurai 1°. $\left\{\rho\alpha + p\epsilon + \frac{\lambda}{\mu}(\gamma\epsilon + \alpha m)\right\}$

l'aire de la courbe $\int y\,dx$ eſt devenue par la ſuppoſition de $y = x^r z$, $\int x^r z\,dx$, & enſuite $\int x^2 z\,dx$. Mais l'équation $x^3 = \frac{az-g}{z^3}$, donne $x = \left\{\frac{az-g}{z^3}\right\}^{\frac{1}{3}}$; $dx = \frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{a}{z^2} - \frac{g}{z^3}\right\}^{-\frac{2}{3}} \times \left\{-\frac{2a\,dz}{z^3} + \frac{3g\,dz}{z^4}\right\}$: on a auſſi $x^2 = \left\{\frac{a}{z^2} - \frac{g}{z^3}\right\}^{\frac{2}{3}}$. Donc en mettant les valeurs de x^2 & de dx dans l'aire de la courbe exprimée par $\int x^2 z\,dx$, on aura $\int x^2 z\,dx = \int -\frac{2a\,dz}{zz} + \frac{3g\,dz}{z^3} = \frac{2a}{z} - \frac{3g}{2zz} + C$.

CHAPITRE XIX.

De la quadrature des courbes dont les équations contiennent quatre termes.

CCLXX.

SOit l'équation à quatre termes $Ay^\alpha x^q + By^r x^p + Cy^\omega x^s + Dy^\varphi x^k = 0$, je la diviſe par $x^q y^\varphi$; ce qui me donne celle-ci, $Ay^{\alpha-\varphi} + By^{r-\varphi} x^{p-q} + Cy^{\omega-\varphi} x^{s-q} + Dx^{k-q} = 0$, & ſuppoſant,

$$\begin{aligned} \alpha - \varphi &= \lambda \\ r - \varphi &= \mu \\ p - q &= \sigma \\ \omega - \varphi &= \theta \\ s - q &= \rho \\ k - q &= \tau \end{aligned}$$

j'ai $Ay^\lambda + By^\mu x^\sigma + Cy^\theta x^\rho + Dx^\tau = 0$. Cette équation repréſente toutes les équations poſſibles à quatre termes. Formule des équations à quatre termes.

Le ſecond cas arrivera ſi $\gamma\rho = mp$, & ſi de plus $m = -p$; car alors on auroit $-1 = 0$, ce qui eſt impoſſible. Examinons ce qu'il faudra faire dans ces deux cas.

1°. Si $\gamma\rho = mp$, je fais $p = \rho K$, j'aurai $\gamma\rho = mK\rho$; donc $\gamma = Km$. Les deux différentielles ſeront donc la premiere

$$\alpha\, ds + \epsilon\, du,$$

& la ſeconde

$$\rho\alpha\, du + \rho K\epsilon\, du + K\epsilon m\, ds + m\alpha\, ds + dt\,\Delta u, s + ds\,\Gamma u, s,$$

ou bien,

$$(\rho\, du + m\, ds).(\alpha + K\epsilon) + du\,\Delta u, s + ds\,\Gamma u, s.$$

Soit maintenant . . . . . $\rho u + ms = t$, on aura $\rho\, du + m\, ds = dt$, & ſoit $\alpha + K\epsilon = \mu$, la différentielle précédente deviendra celle-ci $\mu\, dt + ds\downarrow u, s + dt\,\Xi u, s$ & ſera une différentielle complete. On aura donc par le Théorême fondamental $\frac{d\mu}{ds} + \frac{d\Xi u, s}{ds} = \frac{d\downarrow u, s}{ds}$. Donc $d\mu = -d\Xi u, s + \frac{ds\, d\downarrow u, s}{dt}$. Donc enfin $\mu = -\Xi u, s + \varphi t + \int \frac{ds\, d\downarrow u, s}{dt}$.

Pour déterminer α je fais les mêmes transformations ſur la différentielle $\alpha\, ds + \epsilon\, du$. Ces transformations nous donnent $du = \frac{dt - m\, ds}{\rho}$, $\epsilon = \frac{\mu - \alpha}{K}$. Donc la premiere différentielle transformée ſera $\alpha\, ds + (\frac{\mu - \alpha}{K}).(\frac{dt - m\, ds}{\rho})$; ou bien $(ds + \frac{m\, ds}{K\rho} - \frac{dt}{K\rho})\alpha + \frac{\mu\, dt}{K\rho} - \frac{m\mu\, ds}{K\rho}$. Soit $(1 + \frac{m}{K\rho})\, s - \frac{t}{K\rho} = y$, on aura $ds + \frac{m\, ds}{K\rho} - \frac{dt}{K\rho} = dy$; & auſſi $\frac{\mu\, dt}{K\rho} = \mu\, ds + \frac{\mu m\, ds}{K\rho} - \mu\, dy$. Donc la différen-

3°. Si dans l'un des termes l'expoſant de x eſt zero, & que dans un des deux autres cet expoſant ſoit ou le double ou la moitié de celui qu'a le même x dans le troiſieme, on pourra encore alors avoir la valeur de x en u. Pour le faire mieux ſentir, je repréſente le cas préſent par $au^{\lambda} + bx^{2\beta}u^{\mu} + cx^{\beta}u^{\theta} + d' = 0$. J'ai par conſéquent $bx^{2\beta}u^{\mu} + cx^{\beta}u^{\theta} = -au^{\lambda} - d'$, ou $x^{2\beta} + \frac{cx^{\beta}u^{\theta-\mu}}{b} = \frac{-au^{\lambda-\mu} - d'u^{-\mu}}{b}$. J'acheve le quarré dans le premier membre de cette équation, ce qui donne $x^{2\beta} + \frac{cx^{\beta}u^{\theta-\mu}}{b} + \frac{ccu^{2\theta-2\mu}}{4bb} = \frac{-au^{\lambda-\mu} - d'u^{-\mu}}{b} + \frac{ccu^{2\theta-2\mu}}{4bb}$, & en extrayant la racine quarrée, j'aurai la valeur de x en u. Cette troiſieme ſuppoſition me donne les ſix conditions ſuivantes.

7. $r\lambda - \tau = 0$, & $r\mu + \sigma - \tau = 2(\theta r + \rho - \tau)$
8. $r\lambda - \tau = 0$, & $r\mu + \sigma - \tau = \frac{1}{2}(\theta r + \rho - \tau)$
9. $r\mu + \sigma - \tau = 0$, & $r\lambda - \tau = 2(\theta r + \rho - \tau)$
10. $r\mu + \sigma - \tau = 0$, & $r\lambda - \tau = \frac{1}{2}(\theta r + \rho - \tau)$
11. $\theta r + \rho - \tau = 0$, & $r\lambda - \tau = 2(r\mu + \sigma - \tau)$
12. $\theta r + \rho - \tau = 0$, & $r\lambda - \tau = \frac{1}{2}(r\mu + \sigma - \tau)$

4°. Si l'expoſant de x eſt le même dans deux des trois termes affectés de x & de u, & en même temps double ou la moitié de l'expoſant de x dans le troiſieme, on tirera encore la valeur de x en u. Ce cas peut ſe repréſenter par $ax^{2\beta}u^{\lambda} + bx^{2\beta}u^{\mu} + cx^{\beta}u^{\theta} + d' = 0$; donc j'aurai $x^{2\beta} + \frac{cx^{\beta}u^{\theta}}{au^{\lambda} + bu^{\mu}} = -\frac{d'}{au^{\lambda} + bu^{\mu}}$. J'acheve le quarré, je [illegible] la racine quarrée,

$= N$, on aura la différentielle ſuivante,

$$(M\alpha + N\epsilon)\,dt + \eta\,dy\,\Delta y, t + \eta\,dt\,\downarrow y, t,$$

dans laquelle M & N repréſentent des conſtantes données.

Cette différentielle étant par l'hypotheſe une différentielle complete, on aura $\frac{M\,d\alpha + N\,d\epsilon}{dy} + \frac{d(\eta\downarrow y, t)}{dy} = \frac{d(\eta\,\Delta y, t)}{dt}$. Donc $M\,d\alpha + N\,d\epsilon = -d(\eta\downarrow y, t) + \frac{dy\,d(\eta\,\Delta y, t)}{dt}$. On aura donc la valeur de $M\alpha + N\epsilon$ en y & en t, ou ce qui revient au même en s & en u, puiſque, comme on l'a vu (Art. CLXXXVIII.) $s = \frac{gfy - hkt}{fr - \delta k}$, & $u = \frac{\delta gy - hrt}{\delta k - fr}$. Nous pourrons donc ſuppoſer

$$\alpha = \Xi u, s + K\epsilon,$$

K étant une conſtante connue. Subſtituant pour α cette valeur dans la différentielle $\alpha\,ds + \epsilon\,du$ qui par la ſuppoſition eſt une différentielle exacte, on aura $\epsilon(K\,ds + du) + ds\,\Xi u, s$. Donc en ſuppoſant $Ks + u = r$, on aura la transformée ſuivante $\epsilon\,dr + ds\,\Xi s, r$ qui doit encore être une différentielle complete : on trouvera donc facilement la valeur de ϵ en s & r, ou ce qui eſt la même choſe en s & en u.

CXCI.

Scholie 3. Il y a encore un cas dans lequel la premiere méthode ne peut réuſſir ; c'eſt lorſque $\rho = 0$. Mais alors l'intégration n'en ſera que plus facile. En effet, je donne à la ſeconde différentielle propoſée $\rho\alpha\,du + \epsilon p\,du + \gamma\epsilon\,ds + m\alpha\,ds + dt\,\Delta u, s + ds\,\Gamma u, s$ la forme ſuivante $m\alpha\,ds + m\epsilon\,du + p\epsilon\,du - m\epsilon\,du + \gamma\epsilon\,ds + dt\,\Delta u, s +$

CCLXXIV.

J'en conclus qu'on ne peut réduire que dans certains cas, la quadrature des courbes dont les équations ont quatre termes à l'intégration d'une différentielle $x^r u dx$, dans laquelle x ſoit donnée en u.

CCLXXV.

En ſuivant à peu près les mêmes procédés que nous avons pratiqués dans la premiere partie de ce Chapitre, on parviendra à déterminer dans le cas préſent des équations à quatre termes les courbes qui ſont quarrables ou abſolument, ou par la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, ou par la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole; il n'y aura de difficulté que la longueur du calcul.

On trouve par la méthode du Chapitre précédent les cas d'intégration des équations à quatre termes.

CHAPITRE XX.

Des différentielles qui renferment des logarithmes & des exponentielles.

CCLXXVI.

NOus avons déja vu à la tête du Chapitre ſur les fractions rationelles une regle pour trouver l'intégrale des différentielles logarithmiques les plus ſimples. Mais il en eſt de très-compliquées auxquelles on appliqueroit difficilement cette regle. Nous allons donner ici

1°. Sur l'intégration de celles qui contiennent des logarithmes.

une autre méthode fort utile dans beaucoup de cas. Cette méthode conſiſte à faire uſage de ſubſtitutions, ce qui ſe préſente d'autant plus naturellement que nous nous en ſommes ſervi dans la différentiation de ces mêmes quantités.

CCLXXVII.

Uſage des ſubſtitutions pour intégrer ces quantités.

Premier exemple.

Soit propoſé d'intégrer $\frac{dx}{x\,lx}$, je fais $lx = y$, donc $\frac{dx}{x} = dy$: donc la propoſée devient $\frac{dy}{y}$, dont l'intégrale eſt (Art. CXVII.) ly: remettant pour y ſa valeur, on a $l \cdot lx$ pour l'intégrale cherchée.

On ſuppoſe ici & dans la ſuite la ſous-tangente de la logarithmique $= 1$.

CCLXXVIII.

Second exemple.

De même pour intégrer $m \cdot (lx)^{m-1} \frac{dx}{x}$, je ferai $lx = y$; cette ſuppoſition me donne $\frac{dx}{x} = dy$, $(lx)^{m-1} = y^{m-1}$; donc $m(lx)^{m-1} \frac{dx}{x} = my^{m-1}\,dy$; or l'intégrale de ce ſecond membre eſt, comme on ſçait, y^m: donc l'intégrale cherchée eſt $(lx)^m$.

CCLXXIX.

Troiſieme exemple.

Soit demandée l'intégrale de $m \cdot (l \cdot lx)^{m-1} \frac{dx}{x\,lx}$: je ſuppoſe $lx = y$, d'où je tire $\frac{dx}{x} = dy$, $l \cdot lx = ly$: on a donc la transformée ſuivante $m \cdot (ly)^{m-1} \frac{dy}{y}$, dont l'intégrale eſt (Article précédent) $(ly)^m$. Remettant

pour ly sa valeur, on a $\int m.(l.lx)^{m-1}\frac{dx}{xlx}=(l.lx)^{m}$.

CCLXXX.

Si la proposée étoit $nm.(lx^{m})^{n-1}\frac{dx}{x}$, je ferois $x^{m}=y$, d'où je tire $dx=\frac{dy}{mx^{m-1}}$; $lx^{m}=ly$, & après ces substitutions j'ai la transformée $nm.(ly)^{n-1}.\frac{dy}{mx^{m}}=n.(ly)^{n-1}\frac{dy}{y}$, dont l'intégrale est, comme nous venons de le voir $(ly)^{n}$. Remettant pour y sa valeur en x, on trouvera $(lx^{m})^{n}$ pour l'intégrale cherchée. Quatrieme exemple.

CCLXXXI.

Soit enfin proposé d'intégrer $nm\left\{l.(lx)^{m}\right\}^{n-1}\frac{dx}{xlx}$, je supposerai $lx=y$; donc $\frac{dx}{x}=dy$; $(lx)^{m}=y^{m}$; donc on a la transformée suivante $nm.(ly^{m})^{n-1}\frac{dy}{y}$, dont nous avons vu (Art. CCLXXX.) que l'intégrale est $(ly^{m})^{n}$. Donc $\int nm\left\{l.(lx)^{m}\right\}^{n-1}\frac{dx}{xlx}=\left\{l.(lx)^{m}\right\}^{n}$. Cinquieme exemple.

CCLXXXII.

A l'égard des différentielles exponentielles, l'inverse de la regle que nous avons donnée pour les différentier servira pour les intégrer. Ainsi *l'intégrale d'une différentielle exponentielle est cette quantité même divisée par la différence de son logarithme.* 2°. Intégration des différentielles exponentielles. Regle générale.

Appliquée à des exemples.

En effet de ce que la différence de c^x est $c^x\,dx$, il s'enſuit que l'intégrale de $c^x\,dx$ est c^x. De même ſi on demande l'intégrale de $x^y\,dylx + x^{y-1}\,ydx$, la regle précédente nous apprend qu'elle eſt x^y. Car la différence du logarithme de x^y eſt $dylx + \frac{ydx}{x}$. Diviſant $x^y\,dylx + x^{y-1}\,ydx = x^y\,dylx + \frac{x^y\,ydx}{x}$ par $dylx + \frac{ydx}{x}$, on aura au quotient x^y. Donc, &c.

CCLXXXIII.

S'il s'agiſſoit de trouver l'intégrale de $x^{y^z}\,y^z\,x^{z-1}\,dx + x^{y^z}\,y^z\,dz\,lx\,.\,ly + x^{y^z}\,y^{z-1}\,z\,dy\,lx$, la regle générale nous donneroit x^{y^z}. En effet le logarithme de x^{y^z} eſt $y^z\,lx$, dont la différence eſt $y^z\,\frac{dx}{x} + y^z\,dz\,lx\,.\,ly + y^{z-1}\,z\,dy\,lx$. Diviſant la propoſée par cette quantité, le quotient de la diviſion ſera x^{y^z}.

CCLXXXIV.

Uſage des ſubſtitutions pour trouver les mêmes intégrales.

On peut encore prendre les intégrales des différentielles exponentielles par le moyen des ſubſtitutions. Soit, par exemple, demandée l'intégrale de $c^x\,dx$; je ſuppoſe

Premier exemple.

$c^x = y$, ce qui me donne en prenant les logarithmes de part & d'autre $x\,lc = ly$, ou $x = ly$ $(lc = 1)$. Donc $dx = \frac{dy}{y}$. Subſtituant il me vient $\frac{y\,dy}{y} = dy$, dont l'intégrale eſt, comme on ſait, y. Donc $\int c^x\,dx = c^x$.

CCLXXXV.

De même ſi on avoit $x^y dy lx + \frac{x^y y dx}{x}$, on feroit $x^y = z$, d'où l'on tire l'équation logarithmique $y lx = lz$, & différentiant $\frac{y dx}{x} + dy lx = \frac{dz}{z}$. Après les ſubſtitutions on a pour transformée dz. Donc l'intégrale cherchée eſt x^y, telle que nous l'avons trouvée par la regle générale. Second exemple.

CCLXXXVI.

Soit enfin cherchée l'intégrale de $x^{y^z} \times (y^z x^{-1} dx + y^z dz lx . ly + z dy lx)$: on ſuppoſera comme ci-deſſus $x^{y^z} = u$; d'où l'on tire $y^z lx = lu$, & $y^z x^{-1} dx + y^z dz lx ly + y^{z-1} z dy lx = \frac{du}{u}$. Après les ſubſtitutions la propoſée devient $\int du = u$; donc l'intégrale cherchée eſt x^{y^z}. Il en ſera ainſi des autres. Troiſieme exemple.

CCLXXXVII.

Il y a encore une autre méthode générale pour trouver l'intégrale des différentielles, tant logarithmiques qu'exponentielles, de quelque degré qu'elles ſoient. Cette méthode conſiſte à prendre l'intégrale par parties, c'eſt-à-dire, terme à terme. Autre méthode pour trouver les intégrales des différentielles logarithmiques & exponentielles. En quoi elle conſiſte.

CCLXXXVIII.

Mais avant d'expliquer cette méthode, & d'en faire uſage, il eſt néceſſaire de mettre devant les yeux, par Notion préparatoire.

anticipation, la regle ſuivante qui eſt fort ſimple.

La différentielle de xy eſt, comme on ſait, $x\,dy + y\,dx$: celle de xyz eſt $xy\,dz + xz\,dy + yz\,dx$; & ainſi des autres.

Il ſuit de là évidemment que l'intégrale de $x\,dy$ eſt $xy - \int y\,dx$. Par la même raiſon celle de $xy\,dz + xz\,dy$ eſt $xyz - \int yz\,dx$. Cette propoſition eſt claire, & la preuve en eſt fort aiſée, en différentiant ces dernieres quantités. Cette notion ſuffit pour entendre ce que nous allons dire.

CCLXXXIX.

Application de la méthode de prendre l'intégrale par parties.

1°. Aux différentielles logarithmiques.

Soit demandée l'intégrale de $x\,dx \cdot lx$, je raiſonne ainſi. Si lx étoit une conſtante, l'intégrale demandée ſeroit $\frac{x^2}{2}$, multipliée par cette conſtante. Mais lx eſt une variable; il manque donc un terme à la différentielle propoſée, pour qu'elle ſoit complette, ſavoir la différence de lx multipliée par $\frac{x^2}{2}$, l'intégrale de $x\,dx \cdot lx$ eſt donc $\frac{x^2}{2} lx - \int \frac{x\,dx}{2}$. Mais $\int \frac{x\,dx}{2} = \frac{x^2}{4}$, donc $\int x\,dx\,lx = \frac{x^2}{2} lx - \frac{xx}{4}$. Pour s'en convaincre il n'y a qu'à différentier cette intégrale, & l'on retrouvera la différentielle propoſée.

En faiſant le même raiſonnement, on trouvera que $\int x^m lx \times dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot lx - \int \frac{x^m dx}{m+1}$: or $\int \frac{x^m dx}{m+1} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$; donc $\int x^m dx \cdot lx = \frac{x^{m+1} lx}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$?

CCXC.

Enfin ſi la propoſée étoit $x^m\,dx.(lx)^n$, on trouveroit par la méthode précédente pour premier terme de l'intégrale $\frac{x^{m+1}}{m+1}.(lx)^n - \int \frac{nx^m\,dx}{m+1}.(lx)^{n-1}$: mais $-\int \frac{nx^m\,dx}{m+1}.(lx)^{n-1} = \frac{-nx^{m+1}}{(m+1)^2}.(lx)^{n-1} + \int \frac{n.(n-1)x^m}{(m+1)^2} \times (lx)^{n-2}\,dx$. J'opere ſur le dernier terme, ſon intégrale eſt $\frac{n.(n-1).x^{m+1}}{(m+1)^3}.(lx)^{n-2} - \int \frac{n.(n-1).(n-2).x^m}{(m+1)^3}.(lx)^{n-3}\,dx$. On trouvera ainſi de ſuite tant de termes qu'on voudra de cette intégrale : m & n repréſentent les nombres entiers qui peuvent être les expoſans de x, & de la puiſſance de lx. Il eſt évident que quand n eſt un nombre entier poſitif, la ſuite précédente ſera finie, & contiendra autant de termes plus un, qu'il y aura d'unités dans l'expoſant n. Alors le dernier terme ne contient plus de logarithme, mais ſeulement x élevé à une certaine puiſſance.

CCXCI.

Ce dernier exemple peut ſervir de formule pour trouver les intégrales des différentielles logarithmiques lx à quelque degré qu'elles ſoient élevées. Car en ſuivant la méthode précédente, on trouve qu'en général $\int x^m\,dx.(lx)^n = \frac{x^{m+1}}{m+1} \times \left\{ (lx)^n - \frac{n(lx)^{n-1}}{m+1} + \frac{n.(n-1)}{(m+1)^2} \right.$

Formule pour l'intégration des différentielles logarithmiques repréſentées par $x^m\,dx.(lx)^n$.

$$\times (lx)^{n-2} - \frac{n.(n-1).(n-2)}{(m+1)^3}(lx)^{n-3} + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{(m+1)^4}(lx)^{n-4} - \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(lx)^{n-5}}{(m+1)^5} + \&c.\Big\}.$$

CCXCII.

2°. Application de la même méthode aux différentielles exponentielles.

Appliquons maintenant cette même méthode aux différentielles exponentielles. Soit propoſé d'intégrer $c^{gz}\,dz\,lc$, ou $c^{gz}\,dz$ (c étant ſuppoſé repréſenter un nombre dont le logarithme eſt l'unité), on trouvera par la regle de l'Art. CCLXXXII. $\int c^{gz}\,dz = \frac{c^{gz}}{g}$.

CCXCIII.

Si on demande maintenant l'intégrale de $zc^{gz}\,dz$, cette intégrale ſe prendra par parties. $\int zc^{gz}\,dz = \frac{zc^{gz}}{g} - \int\frac{c^{gz}\,dz}{g}$, c'eſt-à-dire $\frac{zc^{gz}}{g} - \frac{c^{gz}}{gg}$. De même $\int z^2c^{gz}\,dz = \frac{z^2c^{gz}}{g} - \int\frac{2zc^{gz}\,dz}{g}$. Or l'intégrale de ce dernier membre eſt $-\frac{2zc^{gz}}{gg} + \int\frac{2c^{gz}\,dz}{gg} = \frac{2c^{gz}}{g^3}$; l'intégrale entiere de $\int z^2c^{gz}\,dz$ eſt donc $\frac{z^2c^{gz}}{g} - \frac{2zc^{gz}}{gg} + \frac{2c^{gz}}{g^3}$.

CCXCIV.

En général ſi on demandoit l'intégrale de $z^mc^{gz}\,dz\,lc$, ou ſimplement $z^mc^{gz}\,dz$ (lc étant toujours $= 1$), on la

la prendroit par parties de la façon ſuivante, $\int z^m c^{gz} dz = \frac{z^m c^{gz}}{g} - \int \frac{m z^{m-1} c^{gz} dz}{g}$; voilà déja le premier terme de l'intégrale cherchée : pour trouver le ſecond, j'opere ſur le membre affecté du ſigne $\int$. Or $- \int \frac{m z^{m-1} c^{gz} . dz}{g} = - \frac{m z^{m-1} c^{gz}}{gg} + \int \frac{m . (m-1) z^{m-2} c^{gz} . dz}{gg}$. Or $\int \frac{m . (m-1) z^{m-2} c^{gz} dz}{gg} = \frac{m . (m-1) z^{m-2} c^{gz}}{g^3} - \int \frac{m . (m-1) . (m-2) z^{m-3} . c^{gz} dz}{g^3} = - \frac{m . (m-1) . (m-2) . z^{m-3} . c^{gz}}{g^4} + \int \frac{m . (m-1) . (m-2) . (m-3) z^{m-4} . c^{gz} dz}{g^4} = \frac{m . (m-1) . (m-2) . (m-3) . z^{m-4} c^{gz}}{g^5} - \int \frac{m . (m-1) . (m-2) . (m-3) . (m-4) . z^{m-5} c^{gz} dz}{g^5}$.

Donc $\int z^m c^{gz} dz = c^{gz} \times \left\{ \frac{z^m}{g} - \frac{m z^{m-1}}{gg} + \frac{m(m-1) z^{m-2}}{g^3} - \frac{m . (m-1) . (m-2) z^{m-3}}{g^4} + \frac{m . (m-1) . (m-2) . (m-3) . z^{m-4}}{g^5} - \frac{m . (m-1) . (m-2) . (m-3) . (m-4) . z^{m-5}}{g^6} + \text{\&c.} \right\}$.

Formule d'intégration des différentielles exponentielles, repréſentées par $z^m c^{gz} dz$, lc étant $= 1$.

Ces termes ſuffiſent pour montrer la loi que ſuivent dans cette formule les expoſans & les coefficiens de z. On pourra continuer la ſerie tant qu'on voudra. Lorſque m exprimera un nombre entier poſitif, alors la ſuite ſera finie, & l'intégrale de la propoſée contiendra autant de termes plus un, qu'il y aura d'unités dans l'expoſant m.

CCXCV.

On peut encore employer cette méthode pour trouver

l'intégrale des différentielles qui contiennent des logarithmes de logarithmes, comme $x^m dx.l.lx$, $x^m dx : (l.lx)^n$ &c. & auſſi les intégrales de différentielles exponentielles plus compoſées que les précédentes; mais comme ces cas arrivent très-rarement, nous ne nous y arrêterons pas.

CCXCVI.

On pourroit encore prendre l'intégrale des différentielles logarithmiques & exponentielles par approximation, en ſe ſervant des ſuites infinies dans leſquelles il n'entre ni quantité logarithmique, ni exponentielle; quoique cette méthode ſoit longue, pénible & de peu d'uſage, nous donnerons plus bas la maniere de s'en ſervir.

CHAPITRE XXI.

Des différentielles affectées de pluſieurs ſignes d'intégration.

CCXCVII.

Obſervation eſſentielle ſur l'expreſſion de ces ſortes de différentielles.

LOrſqu'on a des quantités différentielles affectées de pluſieurs ſignes d'intégration, il faut bien être en garde contre l'équivoque que peut faire naître leur expreſſion. $\int dx \int u\,dx$, veut dire ou bien l'intégrale de $dx \int u\,dx$, ce que nous marquerons dorénavant ainſi $\int (dx \int u\,dx)$; ou bien l'intégrale de dx multipliée par l'intégrale

de udx, ce que nous marquerons de la façon ſuivante $(\int dx).(\int udx)$. Ces deux cas ſont fort différens; il faut éviter de les confondre. Deux cas différens pour ces différentielles.

Mais avant de chercher les moyens de les intégrer, il eſt bon de ſe rappeller la regle que nous avons indiquée (Art. CCLXXXVIII.) elle eſt néceſſaire pour entendre ce que nous allons dire.

CCXCVIII.

PREMIER CAS.

Le premier cas eſt celui dans lequel on demande l'intégrale des différentielles telles que $dx\int udx$. On intégre dans ce premier cas, lorſque la différentielle ſous le premier ſigne eſt une différentielle exacte. Soit par exemple $\int\left\{dx\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right\}$. Je ſuppoſe $\frac{r}{\sqrt{2rx-xx}}=u$; ce qui me donne $\int\left\{dx\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right\}=\int(dx\int udx)$. L'intégrale de cette derniere quantité eſt, ſuivant ce que nous avons dit (Art. CCLXXXVIII.), $x\int udx-\int uxdx$; & en remettant pour u ſa valeur, $x\int\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}-\int\frac{xrdx}{\sqrt{2rx-xx}}$. La premiere partie de cette intégrale eſt le produit de x, par un arc de cercle dont x eſt le ſinus verſe. La ſeconde partie s'intégre aiſément. Je l'écris ainſi $\frac{rxdx-rrdx}{\sqrt{2rx-xx}}+\frac{rrdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, dont l'intégrale eſt $-r\sqrt{2rx-xx}+\int\frac{rrdx}{\sqrt{2rx-xx}}$. Or $\frac{rrdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ eſt, comme

Expoſition du premier cas.

Procédé qu'il faut ſuivre pour intégrer.

toujours que dans l'équation aucune différentielle n'eſt conſtante, il eſt à propos d'examiner ſi on ne pourroit pas au moins dans certains cas déterminer quelle eſt la différentielle qui priſe pour conſtante, rendra l'équation plus facile à intégrer.

CHAPITRE III.

Méthode pour déterminer, dans quelques cas, la différentielle qui ſuppoſée conſtante facilitera le plus l'intégration.

CCXI.

ON ne peut pas donner de regle générale pour reconnoître dans tous les cas quelle eſt la fluxion qu'on doit regarder comme conſtante, afin que l'intégration en devienne plus facile; on peut cependant ſe guider quelquefois par l'obſervation ſuivante. Je cherche ſi dans la propoſée il y a deux, trois, &c. termes qui multipliés ou diviſés par un facteur commun puiſſent s'intégrer. J'en prends l'intégrale, & c'eſt celle que je ſuppoſe conſtante.

CCXII.

Son application à quelques exemples.

Soit, par exemple, propoſé d'intégrer l'équation ſuivante $X = \frac{dy^3 + dx^2 dy - x dy ddx + x dx ddy}{2x^3 dy^2}$, dans laquelle X repréſente une fonction quelconque de x. J'obſerve

Premier exemple.

$= u^3x - \int \frac{3uurxdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, u^3x eſt une intégrale, & eſt le premier terme de l'intégrale cherchée. J'opere ſur le ſecond membre $-\int \frac{3uurxdx}{\sqrt{2rx-xx}}$. Il eſt égal à $-\int 3uur \left\{\frac{xdx-rdx}{\sqrt{2rx-xx}} + \frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right\} = -\int 3uur \left\{-d(\sqrt{2rx-xx}) + du\right\} = \int -3uurdu + 3uurd(\sqrt{2rx-x^2})$, dont l'intégrale eſt $-u^3r + 3uur\sqrt{2rx-xx} - \int 6rudu\sqrt{2rx-xx}$. Je prends ce dernier terme qui n'eſt pas intégré. Je le mets ſous la forme ſuivante $-\int 6ru \times \frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}} \times \sqrt{2rx-xx} = -\int 6rrudx$; or l'intégrale de $-6rrudx$ eſt $-6rrux + \int 6rrxdu$. Il me reſte donc encore un terme avec le ſigne $\int$. Je mets dans ce terme pour du ſa valeur, ce qui donne $\int 6rrxdu = \int 6rrx \times \frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}} = \int 6r^3 \left\{\frac{xdx-rdx+rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right\} = -6r^3\sqrt{2rx-xx} + 6r^3u$. Il ne me reſte plus de quantités différentielles; j'ai donc l'intégrale entiere de u^3dx; cette intégrale eſt

$u^3x + 3ru^2\sqrt{2rx-xx} - ru^3 - 6r^2ux - 6r^3\sqrt{2rx-xx} + 6r^3u \pm C$.

Intégrale de la différentielle propoſée.

Il eſt aiſé de ſe convaincre de la bonté de nos opérations : en différentiant cette intégrale, mettant pour du ſa valeur, $\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ & effaçant ce qui ſe détruit, on retrouvera u^3dx. Il en ſera de même des autres différentielles ſemblables.

CCCI.

Autre méthode pour avoir l'intégrale de la même différentielle.

Il y a encore une autre méthode pour intégrer les

différentielles de la définition précédente. Cette méthode consiste à se servir des sinus & cosinus exprimés par les quantités exponentielles. Comme cette méthode est fort utile dans certains cas, nous allons la développer ici en l'appliquant à la différentielle qui nous a servi de dernier exemple.

Par le moyen des quantités exponentielles.

CCCII.

Soit proposée $(\int dx) \times \left\{ \int \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-xx}} \right\}^3$; $\int \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-xx}}$ est l'expression d'un arc de cercle & par conséquent d'un angle, dont x est le sinus verse & r le rayon. Je nomme cet angle z, & je suppose le sinus total $= 1$; on aura $\int \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-xx}} = zr$, donc $\left\{ \int \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-xx}} \right\}^3 = z^3 r^3$, & $(\int dx) \times \left\{ \int \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-xx}} \right\}^3 = \int z^3 r^3\,dx$. Soit cos. $rz = y$, on aura cos. $z = \frac{y}{r}$; x qui est le sinus verse $= r - y$, donc $x = r - r$ cos. z or : cos. $z =$ (Introd. Art. XLVI.) $\frac{c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2}$; la différence de $\frac{c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2}$ est (Introd. Art. XXXIV.) $dz\sqrt{-1} \cdot \left\{ \frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2} \right\}$, ou $dz \cdot \left\{ \frac{-c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right\}$; donc $dx = r\,dz$; $\left\{ \frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right\}$, donc $\int z^3 r^3 dx = \int \frac{r^4 z^3 dz\, c^{z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \frac{r^4 z^3\,dz\, c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \int \frac{r^4}{2\sqrt{-1}} \times \left\{ z^3 dz c^{z\sqrt{-1}} - z^3 dz c^{-z\sqrt{-1}} \right\}$. Pour avoir l'intégrale de cette quantité, je la compare avec la formule $\int z^3 c^{gz}\,dz$ de l'Article CCXCIV. Cette

comparaiſon me donne pour le premier terme $g = \sqrt{-1}$, & pour le ſecond, $g = -\sqrt{-1}$. L'intégrale eſt donc $\int z^3 r^3 dx = \frac{r^4}{2\sqrt{-1}} \times$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z^3 c^{z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} + \frac{3zzc^{z\sqrt{-1}}}{1} + \frac{6zc^{z\sqrt{-1}}}{-1\sqrt{-1}} - \frac{6c^{z\sqrt{-1}}}{1} \\ + \frac{z^3 c^{-z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} - \frac{3zzc^{-z\sqrt{-1}}}{1} - \frac{6zc^{-z\sqrt{-1}}}{1\sqrt{-1}} + \frac{6c^{-z\sqrt{-1}}}{1} \end{array} \right\},$$

& en réuniſſant chaques deux termes qui forment des ſinus & des coſinus, on a $\int z^3 r^3 dx = -r^4 z^3 \times$

$$\left\{ \frac{c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2} \right\} + 3r^4 z^2 \left\{ \frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right\}$$

$$+ 6r^4 z \left\{ \frac{c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2} \right\} - 6r^4 \left\{ \frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right\}$$

$$= -r^4 z^3 \text{ cof. } z + 3r^4 zz \text{ ſin. } z + 6r^4 z \text{ cof. } z - 6r^4 \text{ ſin. } z.$$

CCCIII.

Mais ſi nos opérations ſont exactes, cette intégrale doit être la même que celle que nous avons trouvée pour la différentielle propoſée (Art. CCC.). Pour réduire la derniere à celle-là, je remarque que cof. $z = 1 - \frac{x}{r}$, & ſin. $z = \frac{1}{r}\sqrt{(2rx - xx)}$. Je mets dans l'intégrale trouvée ces valeurs de cof. & ſin. z ce qui me donne $-r^4 z^3 + r^3 z^3 x + 3r^3 z^2 \sqrt{(2rx - xx)} + 6r^4 z - 6r^3 zx - 6r^3 \sqrt{(2rx - xx)}$. Mais en comparant cette intégrale avec celle de l'Art. CCC. on trouve que $zr = u$. Donc enfin on a $\int r^3 z^3 dx = -ru^3 + u^3 x + 3ru^2 \sqrt{(2rx - xx)} + 6r^3 u - 6r^2 ux - 6r^3 \sqrt{(2rx - xx)} + C$, la même préciſément que celle que nous a donnée l'autre méthode.

CCCIV.

Autre usage de la même méthode.

Si l'on avoit à intégrer $\int dz \cdot \text{cos. } pz \cdot \text{sin. } qz$, on se serviroit de la même méthode des quantités exponentielles. On auroit ici $\int dz \times \left\{\frac{c^{pz\sqrt{-1}} + c^{-pz\sqrt{-1}}}{2}\right\} \times \left\{\frac{c^{qz\sqrt{-1}} - c^{-qz\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right\}$
$= \frac{c^{(p+q)z\sqrt{-1}} - c^{(-p-q)z\sqrt{-1}} - c^{(p-q)z\sqrt{-1}} + c^{(q-p)z\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}$,
ce qui réduit la proposée à l'intégration de $\int dz \cdot c^{gz}$ Article CCXCII.

Ce seroit la même méthode qu'il faudroit suivre, si on avoit $\int dz \cdot \text{sin. } kz \cdot \text{cos. } rz \cdot \text{cos. } qz \cdot \text{sin. } sz$ &c. On voit par-là qu'elle est fort étendue & très-commode dans beaucoup de cas.

CCCV.

De même par le moyen des exponentielles imaginaires on intégreroit $z^n dz \cdot \text{sin. } qz^m$, cos. pz^k &c. pourvu que n, m & k soient entiers & positifs.

On pourroit encore au lieu de $\int dz \times (\text{sin. } qz \cdot \text{cos. } pz)$ écrire (Art. XLVII. Introd.) $\int dz \times \left\{\text{sin. } \frac{(q+p)z}{2} + \text{sin. } \frac{(q-p)z}{2}\right\}$. Or toutes ces différentielles sont faciles à intégrer, en considérant que $\int dz \text{ sin. } az = -\frac{\text{cos. } az}{a} + A$, & que $\int dz \text{ cos. } az = \frac{\text{sin. } az}{a} + A$, A étant une constante quelconque. Par-là on intégrera en général $dz \overset{\text{sin.}}{\text{cos.}} qz \overset{\text{cos.}}{\text{sin.}} pz \overset{\text{cos.}}{\text{sin.}} rz$, &c.

CCCVI.

CCCVI.

Méthode particuliere utile dans certains cas.

REMARQUE 1. Quelques-unes des différentielles que nous venons de traiter, s'intégreront encore dans certains cas par une méthode particuliére. Nous allons donner ici un eſſai de cette méthode, à cauſe de l'utilité dont elle peut être en beaucoup d'occaſions. Que l'on ait à intégrer $\int \frac{q\,dq\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{(1-qq)}}$, $\frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}}$ repréſentant la différence d'un angle dont q eſt le ſinus & étant $= -\frac{a\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, a étant une conſtante quelconque & $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ la différence d'un angle dont x eſt le ſinus.

1°. Au lieu de $\int \frac{q\,dq\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{(1-qq)}}$ je puis écrire $\int \left\{ \frac{x\,dx\sqrt{(1-qq)}}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{q\,dq\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{(1-qq)}} - \frac{x\,dx\sqrt{(1-qq)}}{\sqrt{(1-xx)}} \right\}$, dont l'intégrale eſt $-\sqrt{(1-xx)}.\sqrt{(1-qq)} - \int \frac{x\,dx\sqrt{(1-qq)}}{\sqrt{(1-xx)}}$; premiere forme que peut avoir l'intégrale cherchée.

2°. Au lieu de $\int \frac{q\,dq\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{(1-qq)}}$, nous pouvons, en mettant pour $\frac{dq}{\sqrt{(1-qq)}}$ ſon égale $-\frac{a\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, écrire $\int -aq\,dx$, dont l'intégrale eſt (Art. CCLXXXVIII.) $-aqx + \int ax\,dq =$ { en mettant pour dq ſa valeur $-\frac{adx\sqrt{(1-qq)}}{\sqrt{(1-xx)}}$ } $-aqx - \int \frac{a^2 x\,dx\sqrt{(1-qq)}}{\sqrt{(1-xx)}}$; ſeconde forme que peut avoir l'intégrale cherchée.

J'ajoute à ces deux expreſſions des conſtantes convenables, je les compare enſuite l'une avec l'autre: cette comparaiſon me donnera, comme il eſt évident, la valeur de $\int \frac{x\,dx\sqrt{(1-qq)}}{\sqrt{(1-xx)}}$: je ſubſtituerai cette valeur dans l'une ou l'autre des deux expreſſions précédentes, & j'aurai l'intégrale complette de la propoſée.

CCCVII.

Remarque importante ſur les exponentielles imaginaires.

REMARQUE 2. A l'occaſion des exponentielles imaginaires dont nous nous ſommes ſervis dans ce Chapitre, qu'il nous ſoit permis de rapporter ici une remarque que nous aurions dû placer dans le Chapitre troiſieme de l'introduction. Nous avons vu dans ce Chapitre que la différentielle d'un angle z dont x eſt le ſinus $= \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. On a donc $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$: ou ſi au lieu de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ on met ici $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}}$ qui lui eſt égale, on trouvera $x = \frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; & ſi au lieu de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ on écrit $\frac{dx}{\sqrt{-1}.\sqrt{(xx-1)}}$ qui lui eſt encore égale, on trouvera $x = \frac{-c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ quantité de ſigne contraire. Nous allons d'abord prouver cette propoſition en faiſant tout au long le calcul qui pourroit embarraſſer à cauſe du changement des ſignes, enſuite nous leverons la difficulté que préſente cette double expreſſion du même ſinus.

1°. $dz = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}}$ donne $z = \sqrt{-1} \times l(x + \sqrt{xx-1})$, ou $\sqrt{-1} \times l\left\{\frac{x+\sqrt{(xx-1)}}{\sqrt{-1}}\right\}$ en ajoutant la conſtante que donne la ſuppoſition de $x = 0$. Donc $\frac{z}{\sqrt{-1}} = l\left\{\frac{x+\sqrt{(xx-1)}}{\sqrt{-1}}\right\}$, ou $-z\sqrt{-1} = l\left\{\frac{x+\sqrt{(xx-1)}}{\sqrt{-1}}\right\}$: donc $c^{-z\sqrt{-1}}\sqrt{-1} - x = \sqrt{(xx-1)}$, & en quarrant les deux membres, $-c^{-2z\sqrt{-1}} - 2xc^{-z\sqrt{-1}}$

$\sqrt{-1} = -1$; donc $1 - c^{-2z\sqrt{-1}} = 2xc^{-z\sqrt{-1}}\sqrt{-1}$, & $x = \frac{1 - c^{-2z\sqrt{-1}}}{2c^{-z\sqrt{-1}}\sqrt{-1}}$; donc enfin $x = \frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

2°. J'écris maintenant $dz = \frac{dx}{\sqrt{-1}.\sqrt{(xx-1)}}$ ce qui me donne $dz\sqrt{-1} = \frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$; $z\sqrt{-1} = l\left\{\frac{x+\sqrt{(xx-1)}}{\sqrt{-1}}\right\}$; $c^{z\sqrt{-1}}\sqrt{-1} - x = \sqrt{(xx-1)}$; $-c^{2z\sqrt{-1}} - 2xc^{z\sqrt{-1}}\sqrt{-1} + 1 = 0$; $\frac{-c^{2z\sqrt{-1}}+1}{2c^{z\sqrt{-1}}\sqrt{-1}} = x$ & enfin $x = \frac{-c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

Voilà donc deux quantités de ſignes différens qui au premier coup d'œil ſemblent repréſenter également le ſinus x de l'angle z. Cependant une ſeule de ces deux quantités peut être la vraie valeur de ce ſinus, & il eſt facile de voir que cette quantité eſt la premiere $\frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Car lorſque z eſt très-petite & poſitive, cette premiere quantité eſt poſitive, comme elle le doit être, & la ſeconde $\frac{-c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ eſt négative. En effet $c^{z\sqrt{-1}} = 1 + z\sqrt{-1}$, & $c^{-z\sqrt{-1}} = 1 - z\sqrt{-1}$; donc $\frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{1+z\sqrt{-1}-1+z\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} = z$; au lieu que $\frac{-c^{z\sqrt{-1}} + c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{-1-z\sqrt{-1}+1-z\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} = -z$.

Afin de concevoir maintenant pourquoi l'on trouve

deux valeurs à x, quoiqu'il n'y en ait qu'une qui ſoit la véritable, on remarquera que dans l'équation $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, le dénominateur $\sqrt{(1-xx)}$ eſt ſuppoſé poſitif; cependant comme $\sqrt{(1-xx)}$ a deux valeurs égales & de ſignes contraires $+\sqrt{(1-xx)}$ & $-\sqrt{(1-xx)}$, l'équation $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ repréſente les deux ſuivantes $dz = \frac{dx}{+\sqrt{(1-xx)}}$ qui eſt la vraie équation entre l'angle z & ſon ſinus x, & $dz = \frac{dx}{-\sqrt{(1-xx)}}$ qui n'eſt pas la vraie équation entre cet angle & ſon ſinus. La premiere de ces deux équations nous donne $x = \frac{c^{z\sqrt{-1}} - c^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, vraie valeur du ſinus, qui ſubſtituée dans l'équation $dz = \frac{dx}{+\sqrt{(1-xx)}}$ rendra $dz = dz$, comme cela doit être; la ſeconde des deux équations donne $x = \frac{c^{-z\sqrt{-1}} - c^{z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, qui n'eſt pas la valeur du ſinus, mais qui ſubſtituée dans $dz = \frac{dx}{-\sqrt{(1-xx)}}$ rendra auſſi $dz = dz$: ainſi les deux valeurs de x ſatisfont également à l'équation $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, quoiqu'une ſeule de ces valeurs repréſente réellement le ſinus.

C'eſt par cette même raiſon de l'équivoque des ſignes + & — qui affectent les quantités radicales, qu'on a $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}}$ & $= \frac{dx}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{(xx-1)}}$, quoique $\sqrt{-1}$ ne ſemble pas égale à $\frac{1}{\sqrt{-1}}$. Mais $\sqrt{-1}$ a les deux valeurs $\pm\sqrt{-1}$ & on trouvera $\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$, ſi on obſerve de prendre $\pm\sqrt{-1} = \frac{1}{\mp\sqrt{-1}}$.

Nous avons tiré cette remarque fort utile pour la théorie des quantités exponentielles & imaginaires, de l'Article CCLXVIII. du Traité ſur différens points importans du ſyſtême du monde.

CCCVIII.

Nous finirons cette premiere Partie qui contient à peu près tout ce que les Géometres ont trouvé ſur l'intégration des différentielles à une changeante, par indiquer la méthode de leur appliquer les ſuites ou ſeries infinies. Cette méthode nous donne par approximation l'intégrale de certaines différentielles qui ne ſont pas intégrables algébriquement.

CHAPITRE XXII.

Des différentielles qui s'integrent par le moyen des ſeries *ou* ſuites infinies.

NOus diviſerons ce Chapitre en deux parties. Dans la premiere nous donnerons une idée abrégée de la théorie des ſeries ou ſuites infinies ; la ſeconde contiendra leurs uſages pour le Calcul intégral.

§. I.

Théorie des Suites.

CCCIX.

Définition des Suites.

DÉFINITION. On entend par *ſerie infinie* une ſuite de termes diſpoſés ſuivant un certain ordre, qui vont en augmentant ou en décroiſſant juſqu'à l'infini.

CCCX.

Leur diviſion en *convergentes* & *divergentes*.

On diſtingue donc deux ſortes de *ſeries*. On nomme les unes *ſeries convergentes*, & les autres *ſeries divergentes*.

Les *ſeries convergentes* ſont celles dont les termes vont en diminuant à l'infini. Nous prouverons plus bas que ces ſeries ſont les ſeules vraies.

Les *ſeries divergentes* ſont celles dont les termes vont en augmentant à l'infini.

Application des Suites.

Les ſeries ſervent à trouver des diviſeurs approchés des quantités qu'on ne peut diviſer exactement; elles donnent auſſi par approximation les racines des quantités qui n'en ont point d'exactes.

CCCXI.

Aux diviſions infinies.

PROBLEME I. Etant donnée la fraction $\frac{aa}{b \pm x}$ (dans laquelle a & b ſont des quantités déterminées, & x une indéterminée) qui n'eſt pas diviſible exactement par ſon dénominateur binome, la réduire en ſuite infinie.

SOLUTION. Je fais la diviſion ſuivant les regles ordinaires de l'Algebre, de la maniere ſuivante.

Dividendé. Diviſeur. QUOTIENT.

$$aa : b \mp x \left\{ \frac{aa}{b} \mp \frac{aax}{bb} + \frac{a^2x^2}{b^3} \mp \frac{a^2x^3}{b^4} + \frac{a^2x^4}{b^5} \mp \frac{a^2x^5}{b^6} + \frac{a^2x^6}{b^7} \mp \frac{a^2x^7}{b^8} + \text{\&c.} \right.$$

$$\begin{array}{r} -aa \mp \frac{aax}{b} \\ \hline 0 \mp \frac{aax}{b} \\ \pm \frac{aax}{b} + \frac{a^2x^2}{b^2} \\ \hline 0 + \frac{a^2x^2}{b^2} \\ -\frac{a^2x^2}{b^2} \mp \frac{a^2x^3}{b^3} \\ \hline 0 \mp \frac{a^2x^3}{b^3} \\ \pm \frac{a^2x^3}{b^3} + \frac{a^2x^4}{b^4} \\ \hline 0 + \frac{a^2x^4}{b^4} \\ -\frac{a^2x^4}{b^4} \mp \frac{a^2x^5}{b^5} \\ \hline 0 \mp \frac{a^2x^5}{b^5} \\ \pm \frac{a^2x^5}{b^5} + \frac{a^2x^6}{b^6} \\ \hline 0 + \frac{a^2x^6}{b^6} \\ -\frac{a^2x^6}{b^6} \mp \frac{a^2x^7}{b^7} \\ \hline 0 \mp \frac{a^2x^7}{b^7} \\ + \frac{a^2x^7}{b^7} + \frac{a^2x^8}{b^8} \\ \hline 0 + \frac{a^2x^8}{b^8} \end{array}$$

&c.

Le quotient eſt donc la ſerie ſuivante (A) $\frac{aa}{b} \mp \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} \mp \frac{a^2x^3}{b^4} + \frac{a^2x^4}{b^5} \mp \frac{a^2x^5}{b^6} + \frac{a^2x^6}{b^7} \mp \frac{a^2x^7}{b^8}$ + &c. qui peut ſe continuer autant qu'on voudra.

CCCXII.

Si x eſt le premier terme du diviſeur, enſorte que la fraction donnée ſoit $\frac{aa}{x \pm b}$, alors le quotient de la diviſion ſera la ſuite infinie (B) $\frac{aa}{x} \mp \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3} \mp \frac{a^2b^3}{x^4} + \frac{a^2b^4}{x^5} \mp \frac{a^2b^5}{x^6} + \frac{a^2b^6}{x^7} \mp \frac{a^2b^7}{x^8}$ + &c. Cette ſerie ſe trouve de la même maniere que la précédente.

CCCXIII.

Pour qu'une ſerie ſoit convergente & vraie, le plus grand terme doit être le premier en diviſeur.

THÉOREME 1. Si dans la ſerie A dans laquelle les expoſans de x vont en croiſſant, x eſt fort petite en comparaiſon de b, enſorte que $\frac{x}{b}$ ſoit une fraction moindre que l'unité, cette ſerie ſera convergente & vraie, c'eſt-à-dire $= \frac{aa}{b \pm x}$.

DÉMONSTRATION. 1°. Cette ſuite ſera convergente. Car dans l'hypotheſe de $x < b$, les puiſſances $\frac{x}{b}$, $\frac{xx}{bb}$, $\frac{x^4}{b^4}$ &c. de la fraction $\frac{x}{b}$ forment une progreſſion géométrique qui décroît à l'infini d'autant plus rapidement que $\frac{x}{b}$ eſt plus petite. Donc en faiſant enſorte que les termes de la ſerie A ſe reglent ſur les puiſſances de $\frac{x}{b}$, ce qui eſt facile en lui donnant la forme ſuivante $\left\{ \frac{aa}{b} \mp \frac{aax}{bb} \right\} \times \left\{ 1 + \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^4}{b^4} + \frac{x^6}{b^6} + \text{\&c.} \right\}$, on voit que chaque terme ſera beaucoup moindre que celui qui

qui le précede, & qu'ils décroîtront à l'infini. Donc (Art. cccx.) la ſerie ſera convergente.

2°. Je dis que cette ſuite A ſera vraie, c'eſt-à dire, qu'elle nous redonnera la fraction $\frac{aa}{b \pm x}$ dont elle a pris naiſſance. Car, comme nous venons de le voir, la ſuite $A = \left\{\frac{aa}{b} \mp \frac{aax}{b^2}\right\} \times (F) \left\{1 + \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^4}{b^4} + \frac{x^6}{b^6} + \&c.\right\}$; or F a tous ſes termes en progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini, puiſque par l'hypotheſe $x < b$. Donc ſa ſomme $= \frac{bb}{bb - xx}$ *; on a donc $A = \left\{\frac{aa}{b} \mp \frac{aax}{b^2}\right\} \times \frac{bb}{bb - xx} = \frac{aab}{bb - xx} \mp \frac{aax}{bb - xx} = aa \times \frac{b \mp x}{(b + x) \cdot (b - x)} = \frac{aa \times 1}{b \pm x}$. C. Q. F. P.

* *Nota.* Les regles des proportions connues ſans doute par tous nos Lecteurs, nous apprennent qu'il eſt aiſé d'avoir la ſomme d'une progreſſion géométrique quelconque décroiſſante à l'infini. On peut la trouver par deux proportions; la premiere eſt que *la différence des deux premiers termes eſt au premier terme, comme la différence du premier terme au dernier eſt à la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier.* Or dans une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini le dernier terme ſera infiniment petit, & ne ſera par conſéquent point comparable aux deux premiers termes; le premier terme pourra donc être pris pour la différence du premier terme au dernier, & la ſomme de tous les termes qui précedent le dernier pourra auſſi être priſe pour la ſomme de tous les termes. La proportion précédente deviendra donc celle-ci: *La différence des deux premiers termes eſt au premier terme, comme le premier terme eſt à la ſomme de tous les termes.* La ſeconde proportion eſt celle-ci: *La ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme un ſeul antécédent eſt à ſon conſéquent.* Or tous les termes ſont antécédens hors le dernier, & tous les termes ſont conſéquens hors le premier. Mais la progreſſion géométrique étant décroiſſante à l'infini, ſon dernier terme ſera infiniment petit, & par conſéquent pourra être regardé comme nul par rapport aux autres. On aura donc: *La ſomme de tous les termes eſt à la ſomme de tous les termes moins le premier, comme un ſeul antécédent eſt à ſon conſéquent.*

Appliquons ces deux proportions à la progreſſion préſente; en nommant f la ſomme de tous les termes, on aura 1°. $1 - \frac{x^2}{b^2} : 1 :: 1 : f = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{b^2}}$. Donc $f = \frac{b^2}{b^2 - x^2}$. 2°. On aura $f - 1 :: 1 : \frac{x^2}{b^2}$. Donc $(f - 1) \times 1 = f \times \frac{x^2}{b^2}$; donc $f \times 1 - f \times \frac{x^2}{b^2} = 1$; donc $f = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{b^2}} = \frac{b^2}{b^2 - x^2}$.

CCCXIV.

THÉOREME 2. Dans la ſerie (B) $\frac{aa}{x} \mp \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3} \mp \frac{aab^3}{x^4} + \frac{aab^4}{x^5} \mp \frac{aab^5}{x^6} + \frac{aab^6}{x^7} \mp \frac{aab^7}{x^8}$ + &c. dans laquelle les expoſans de x vont en décroiſſant, puiſqu'elle eſt la même que la ſuivante $aax^{-1} \mp aabx^{-2} + aab^2x^{-3} \mp aab^3x^{-4}$ + &c., ſi x eſt plus grande que b, enſorte que la fraction $\frac{b}{x}$ ſoit moindre que l'unité, cette ſerie ſera convergente, & donnera la vraie valeur de $\frac{aa}{x \pm b}$.

DÉMONSTRATION. 1°. Cette ſerie B ſera convergente. Car en lui donnant la ſomme ſuivante $\left\{\frac{aa}{x} \mp \frac{aab}{x^2}\right\} \times \left\{1 + \frac{b^2}{x^2} + \frac{b^4}{x^4} + \frac{b^6}{x^6} + \&c.\right\}$ ſes termes ſont ordonnés par rapport à la progreſſion géométrique, $1, \frac{b^2}{x^2}, \frac{b^4}{x^4}$ &c. laquelle décroît d'autant plus vîte que la fraction $\frac{b}{x}$ eſt plus petite. Donc cette ſerie alors ſera convergente, & d'autant plus convergente que x ſera plus grande par rapport à b.

2°. La ſuite (B) ſera vraie, c'eſt-à-dire $= \frac{aa}{x \pm b}$ dans le cas de $x > b$. Car on a, comme nous venons de le voir, $B = \left\{\frac{aa}{x} \mp \frac{aab}{xx}\right\} \times (G) \left\{1 + \frac{b^2}{x^2} + \frac{b^4}{x^4} + \frac{b^6}{b^6} + \&c.\right\}$ Or dans cette ſuite b étant $< x$, G forme une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini. Donc (N^a. Art. CCCXIII.) ſa ſomme $= \frac{xx}{xx - bb}$. Donc $B = \left\{\frac{aa}{x} \mp \frac{aab}{xx}\right\} \times \frac{xx}{xx - bb} = \frac{aax}{xx - bb} \mp \frac{aab}{xx - bb} = aa \times \frac{(x \mp b)}{(x - b).(x + b)} = \frac{aa \times 1}{x \pm b}$. *C. Q. F. P.*

CCCXV.

Les ſeries convergentes ſont les ſeules vraies.

COROLLAIRE I. Il faut conclure des deux Théorêmes précédens, que ſi dans la ſerie A, x étoit plus grande que b, & ſi dans la ſerie B, x étoit plus petite que b, ces ſeries ſeroient divergentes ; auquel cas on prouveroit aiſément que la ſerie A provenant de la fraction $\frac{aa}{b \pm x}$, & la ſerie B qui vient de $\frac{aa}{x \pm b}$, ſeroient d'une valeur infinie, au lieu que les fractions $\frac{aa}{b \pm x}$, $\frac{aa}{x \pm b}$ ſont finies. Donc ces ſuites A & B donneroient faux. La raiſon en eſt ſimple & évidente. Car la vraie valeur d'une fraction eſt le quotient de la diviſion, plus le reſte diviſé par le diviſeur. Or il eſt aiſé de voir que dans les ſeries convergentes ce reſte va toujours en diminuant, d'autant plus que la ſerie eſt plus convergente, enſorte qu'il devient ſi petit qu'on peut le regarder comme nul. Par exemple, dans la ſerie (A) (Art. CCCXI.) qui ſera d'autant plus convergente, comme nous venons de le démontrer (Art. CCCXIII.), que x ſera plus petite par rapport à b, ſuppoſons $x = 1$, $b = 10$, $a = 1$, ſi on s'en tient au ſixieme terme du quotient $\frac{a^5 x^5}{b^7}$, on aura pour reſte $\mp \frac{a^5 x^7}{b^7}$ diviſé par $b \pm x$; c'eſt-à-dire $\mp \frac{1}{10000000 \times (10 \pm 1)}$, fraction qu'on voit bien être déja fort petite. Si on prend encore un terme au quotient $\mp \frac{a^5 x^7}{b^8}$, le reſte ſera $+ \frac{1}{100000000 . (10 \pm 1)}$, qui eſt beaucoup plus petit que le reſte précédent, & toujours ainſi de ſuite. Si au lieu de ſuppoſer $b = 10$, on le ſuppoſe $= 100$, alors les reſtes,

comme on le voit, décroîtront beaucoup plus rapidement; enſorte qu'après avoir pris un certain nombre de termes, on pourra regarder ces reſtes comme nuls, & le quotient comme la valeur exacte de la fraction. C'eſt le contraire dans les ſeries divergentes; plus elles ſont divergentes, plus le reſte eſt grand: il va toujours en augmentant à meſure qu'on prend plus de termes au quotient. Suppoſons dans la ſerie A, qui dans ce cas ſera divergente, $b = 1$, $a = 1$, $x = 10$: ſi on s'arrête au quatrieme terme $\mp \frac{a^2x^3}{b^4}$, on aura pour reſte $+ \frac{a^2x^4}{b^4}$ diviſé par $b \pm x$, c'eſt-à-dire $+ \frac{10000}{1 \times (1 \pm 10)}$ qu'on voit bien être déja fort grand. Si on prend un cinquieme terme, le reſte ſera $\mp \frac{100000}{1 \times (1 \pm 10)}$, qui eſt plus grand que le précédent; & ainſi de ſuite.

Donc dans les ſeries divergentes plus on prend de termes, plus on s'éloigne de la vraie valeur de la propoſée. Donc les ſeries convergentes ſont ſeules bonnes.

CCCXVI.

Diviſion des ſeries convergentes, en *croiſſantes* ou *aſcendantes*, & *décroiſſantes* ou *deſcendantes*.

COROLLAIRE 2. Il faut diſtinguer deux ſortes de ſeries convergentes. Les unes ſont d'autant plus convergentes, que leur indéterminée eſt plus petite; & dans ces premieres qu'on nomme ſeries *croiſſantes* ou *aſcendantes* les expoſans de cette indéterminée vont en croiſſant. Telle eſt la ſerie A (Art. CCCXI.). Les autres convergent d'autant plus que leur indéterminée eſt plus grande. Dans celles-là les expoſans de l'indéterminée vont en décroiſſant, & elles ſe nomment ſeries *décroiſſantes* ou

deſcendantes. La ſuite *B* (Art. CCCXII.) eſt de cette ſeconde eſpece. Il ne faut pas confondre ces deux genres de ſuites: car on les employe à des uſages fort différens & quelquefois même oppoſés.

CCCXVII.

COROLLAIRE GÉNÉRAL. Il ſuit évidemment de ce que nous venons de dire, que lorſqu'on veut par des diviſions continues, réduire des fractions dont les dénominateurs ſont compoſés de termes inégaux, en ſeries infinies de valeurs égales à ces fractions, il faut que le plus grand terme du dénominateur ſoit le premier en diviſeur; autrement les ſuites provenantes de ces diviſions ſeroient divergentes, & par conſéquent fauſſes.

CCCXVIII.

SCHOLIE 1. Si dans la propoſée $\frac{aa}{b+x}$, b étoit $= x$, alors elle deviendroit $\frac{aa}{b \pm b}$; & en faiſant la diviſion on auroit la ſerie ſuivante $\frac{aa}{b} \mp \frac{aa}{b} + \frac{aa}{b} \mp \frac{aa}{b} + \frac{aa}{b}$ &c.

Embarras dans le cas où le dénominateur a ſes termes égaux.

$$= \left\{ \frac{aa}{b} \mp \frac{aa}{b} \right\} \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{\&c.})$$

$$= \frac{aa}{b} \times (1 \mp 1 + 1 \mp 1 + 1 \mp \text{\&c.})$$

Donc en ſuppoſant qu'on ait 1°. $\frac{aa}{b-b}$, cette ſerie devient $\frac{aa}{b} \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{\&c.})$ d'une valeur infinie; ce qui ne nous apprend rien de nouveau; puiſque nous ſavons déja que $\frac{aa}{b-b} = \frac{aa}{0} = \infty$.

2°. Si on a $\frac{aa}{b+b}$, alors la ſerie réſultante de la diviſion

est $\frac{aa}{b} \times (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.)$ $= \frac{aa}{b} \times (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \&c.) = 0$; donc on auroit $\frac{aa}{b+b} = 0$, ce qui eſt faux.

Donc en général dans le cas de $b = x$, la diviſion infinie de la fraction $\frac{aa}{b+b}$ ne nous donnera qu'un infini que nous connoiſſions déja dans $\frac{aa}{b-x}$; & nous donnera toujours faux dans $\frac{aa}{b+x}$.

Donc toute fraction dont le dénominateur binome a ſes deux termes égaux, ne pourra dans l'état où elle eſt alors, ſe réduire en ſuite infinie.

CCCXIX.

Ce qu'il faut faire dans ce cas.

SCHOLIE 2. Cependant il eſt une préparation par le moyen de laquelle on peut appliquer avec ſuccès la méthode des ſuites aux fractions, dont le dénominateur binome ſera compoſé de deux termes égaux; en ſuppoſant toutesfois qu'il eſt la ſomme de ces deux termes: car s'il en étoit la différence, alors le dénominateur étant zéro, la fraction ſeroit viſiblement infinie. Cette préparation conſiſte à partager la ſomme des deux parties du dénominateur en deux autres parties inégales, dont la plus grande ſoit la premiere en diviſeur. Car alors faiſant la diviſion, on aura (Art. CCCXVII.) une ſerie convergente.

Application à un exemple.

Par exemple dans la propoſée $\frac{aa}{b+b}$, on ſuppoſera $c = 2b + x$; & alors la fraction devient $\frac{aa}{c-x}$, dont on voit bien que le dénominateur $c - x = 2b + x - x$, eſt le même que $b + b$. La ſerie qui proviendra de la diviſion

de cette derniere fraction ſera toujours (Art. CCCXIII. N°.2.) $= \frac{aa}{b+b}$; & elle ſe pourra varier en autant de vraies ſeries qu'on donnera de valeurs différentes à x.

Si l'on prend $c = 2b - x$, la fraction $\frac{aa}{b+b}$ devient $\frac{aa}{c+x}$, dont la ſerie faite par diviſion infinie ſera toujours égale à $\frac{aa}{b+b}$. Elle ſe peut encore varier en autant de ſeries convergentes qu'on donnera de valeurs à x moindres que $2b - x$.

CCCXX.

Appliquons cette regle à un exemple numérique. Soit propoſée la fraction $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ dont on voit que le dénominateur a ſes deux termes égaux. Si je diviſe cette fraction dans l'état où elle eſt, je trouve pour quotient $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ &c. $= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 +$ &c. ſerie de laquelle le R. P. Grandi conclut que $\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 +$ &c. d'où il tire une démonſtration de la création. Cependant il ne lui étoit pas difficile de voir que la valeur de la fraction $\frac{1}{1+1}$ n'eſt pas ſeulement le quotient $0+0+0+0+0+$ &c., mais encore le reſte $\frac{\pm 1}{1+1} = \pm \frac{1}{2}$, ce qui ne nous apprend rien de nouveau. Second exemple.

Si donc l'on veut avoir une ſuite convergente de même valeur que la fraction $\frac{1}{1+1}$, il faut la mettre ſous la forme ſuivante $\frac{1}{3-1}$ qui lui eſt égale. La diviſion de cette fraction continuée à l'infini donne la ſuite $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} +$ &c. dont les termes, comme on le voit,

forment une progreſſion géométrique décroiſſante à l'infini. Sa ſomme (N°. de l'Art. CCCXIII.) eſt donc $= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}$ $= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{3}{9} - \frac{1}{9}} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{1+1}$.

On pourra encore trouver une infinité d'autres ſuites toutes égales entre elles & égales à la fraction $\frac{1}{2}$, en prenant ſucceſſivement pour ſon dénominateur $4-2$, $5-3$, $6-4$, &c. dont la ſomme $=2$, & en obſervant que le plus grand terme ſoit le premier en diviſeur.

CCCXXI.

REMARQUE GÉNÉRALE. Ce que nous venons de dire ſur les fractions qui ont un binome pour dénominateur, doit s'entendre auſſi des fractions dont le dénominateur eſt un trinome, un quatrinome & en général une grandeur quelconque; puiſque, comme on ſait, toute grandeur peut être réduite en binome, en regardant une partie de ſes termes, comme le premier terme du binome, & l'autre partie, comme le ſecond terme.

CCCXXII.

Uſage des ſuites pour l'extraction des racines.

PROBLEME 2. Etant donnée la grandeur ſourde ou irrationelle $\sqrt{(aa \pm xx)}$, la débarraſſer de ſon radical en la réduiſant en ſuite infinie.

SOLUTION. Je fais l'extraction de la racine quarrée ſuivant la maniere ordinaire enſeignée dans tous les Livres d'Algebre, & comme on le voit ici.

$aa \pm xx$

$$aa \pm xx \left\{ \begin{array}{l} 2a \pm \frac{xx}{a} - \frac{x^4}{4a^3} \pm \frac{x^6}{8a^5} - \frac{5x^8}{64a^7} \pm \frac{7x^{10}}{128a^9} - \text{\&c.} \\ a \pm \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \pm \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}} \pm \text{\&c.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} -\frac{aa \pm xx}{0 \pm xx} \\ \quad \frac{\mp xx - \frac{x^4}{4aa}}{0 - \frac{x^4}{4aa}} \\ \quad \frac{+\frac{x^4}{4aa} \pm \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}}{0 \pm \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}} \\ \quad \frac{\mp \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{16a^6} \pm \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}}}{0 - \frac{5x^8}{64a^6} \pm \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}}} \\ \quad \frac{+\frac{5x^8}{64a^6} \pm \frac{5x^{10}}{128a^8} - \frac{5x^{12}}{512a^{10}} \pm \frac{5x^{14}}{1024a^{12}}}{0 \pm \frac{7x^{10}}{128a^8} - \frac{7x^{12}}{512a^{10}} \pm \frac{5x^{14}}{1024a^{12}}} \\ \quad \frac{\pm \frac{7x^{10}}{128a^8} - \frac{7x^{12}}{256a^{10}} \pm \frac{7x^{14}}{1024a^{12}} - \frac{7x^{16}}{2048a^{14}} \pm \frac{12x^{18}}{16384a^{16}} - \frac{49x^{20}}{64536a^{18}}}{0 - \frac{21x^{12}}{512a^{10}} \pm \frac{12x^{14}}{1024a^{12}} - \frac{7x^{16}}{2048a^{14}} \pm \frac{12x^{18}}{16384a^{16}} - \frac{49x^{20}}{64536a^{18}}} \end{array}$$

&c.

Je prends la racine quarrée de aa qui eſt a. Je l'écris à droite de $aa \pm xx$ avec une barre entre deux. Je quarre a, ſon quarré eſt aa que je ſouſtrais de $aa \pm xx$, il reſte $\pm xx$. Je diviſe $\pm xx$ par $2a$, double du premier terme de la racine. J'ai pour ſecond terme de cette racine $\pm \frac{xx}{2a}$. Je l'écris à côté du premier. Je multiplie $\pm \frac{xx}{2a}$ par $2a \pm \frac{xx}{2a}$, & j'en ſouſtrais le produit $\pm xx + \frac{x^4}{4aa}$ de $\pm xx$, ce qui ſe fait en l'écrivant avec des ſignes contraires; le reſte eſt $-\frac{x^4}{4aa}$. Je le diviſe par le double

des termes qui ſont déja à la racine, il me vient $-\frac{x^4}{8a^3}$ qui eſt le troiſieme terme de la ſuite. Continuant ainſi l'opération, j'aurai autant de termes de la racine que je voudrai. Suppoſé que j'euſſe réſolu de finir ma ſuite à $-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}$: j'aurois pu négliger dans l'opération tous les termes tels que $\frac{5x^{14}}{1024a^{13}}$, &c. dans leſquels l'expoſant de la puiſſance de x eſt plus grand que 12.

CCCXXIII.

Si la propoſée eſt $\sqrt{(xx \pm aa)}$, en faiſant les mêmes opérations que ci-deſſus on trouvera pour racine la ſerie ſuivante $x \pm \frac{aa}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} \pm \frac{a^6}{16x^5} - \frac{5a^8}{128x^7} \pm \frac{7a^{10}}{256x^9} - \frac{21a^{12}}{1024x^{11}} \pm$ &c.

CCCXXIV.

Pour que la ſerie ſoit vraie le plus grand terme doit être le premier.

REMARQUE 1. Si dans la grandeur ſourde $\sqrt{(aa \pm xx)}$, aa eſt le plus grand terme, il faudra ſe ſervir de la premiere ſuite qui dans ce cas ſera convergente, vraie, & approchera d'auſſi près que l'on voudra de la racine cherchée. Mais ſi xx eſt plus grand que aa, alors il faudra ſe ſervir de la ſeconde ſuite infinie.

On extraira de même par le moyen de ſuites infinies les racines cubiques, quatriemes, cinquiemes &c. des quantités qui n'en ont point de finies.

CCCXXV.

Moyen d'abréger les opérations précédentes,

REMARQUE 2. Il y a un moyen d'abréger les opérations précédentes ; c'eſt de ſe ſervir du fameux Théorême de

M. Newton, pour élever un binome $p \pm q$ à une puiſſance quelconque m. Telle eſt, comme on ſait, la formule de ce Théorême

$$p^m \pm mp^{m-1}q^1 + \frac{m.(m-1)p^{m-2}q^2}{1.2} \pm \frac{m.(m-1).(m-2)p^{m-3}q^3}{1.2.3} + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)p^{m-4}q^4}{1.2.3.4} \pm \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)p^{m-5}q^5}{1.2.3.4.5} + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4).(m-5)p^{m-6}q^6}{1.2.3.4.5.6} \pm \text{&c.}$$

en ſe ſervant du Théorême de M. Newton pour l'élévation d'un binome à une puiſſance quelconque.

Si c'eſt une racine quarrée, ou cubique, ou quatrieme &c. qu'on veut prendre, alors on fera $m = \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{4}$; & ſi la propoſée eſt un quarré exact, ou un cube exact, &c. la ſuite s'arrêtera d'elle-même, le numérateur d'un des termes devenant zéro; ſinon on la peut pouſſer auſſi loin qu'on veut.

CCCXXVI.

Pour faire mieux ſentir l'uſage de cette formule, appliquons-la à l'exemple que nous avons traité (Art. CCCXXII.) $\sqrt{(aa \pm xx)}$. Comparant avec la formule, on a

$$p = aa.$$
$$q = xx$$
$$m = \tfrac{1}{2}$$

mettant ces valeurs dans tous les termes de la formule, elle devient $a \pm \frac{1}{2}a^{-1}xx - \frac{1}{8}a^{-3}x^4 \pm \frac{1}{16}a^{-5}x^6 - \frac{5}{128}a^{-7}x^8 \pm \frac{7}{256}a^{-9}x^{10} - \frac{21}{1024}a^{-11}x^{12} \pm$ &c. qui eſt préciſément la même quantité que nous avions trouvée (Art. CCCXXII.) par une autre méthode.

CCCXXVII.

Par le moyen de cette même formule, on éleve auſſi un binome à une puiſſance négative entiere ou rompue. Mais il faut toujours obſerver que le plus grand des deux termes ſoit le premier dans l'opération : autrement l'on auroit des ſeries fauſſes.

CCCXXVIII.

On réduit encore par le moyen de ce théorême, des nombres en ſuites infinies. Si j'ai, par exemple, à extraire la racine quarrée de $2 =$ (Art. CCCXX.) $3 - 1$, c'eſt-à-dire, à élever $3 - 1$ à la puiſſance $\frac{1}{2}$, je vois que $p = 3$, $q = -1$, $m = \frac{1}{2}$. Subſtituant donc ces valeurs dans la formule, elle devient $3^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}-1} 1^1 + \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)3^{\frac{1}{2}-2}1^2}{1\cdot 2} - \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)3^{\frac{1}{2}-3}1^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)\cdot(\frac{1}{2}-3)3^{\frac{1}{2}-4}1^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ — &c. En réduiſant cette ſerie, on aura la racine approchée de 2; & ainſi des autres.

On ſent bien que la formule s'étend aux trinomes, quatrinomes, toute quantité pouvant être regardée comme un binome. (Art. CCCXXI.)

CCCXXIX.

REMARQUE 3. On fait ſur les ſuites infinies les mêmes opérations que ſur les quantités finies; elles ſont

ſuſceptibles entre elles & avec des grandeurs finies d'addition, de ſouſtraction, de multiplication & de diviſion. On les éleve à des puiſſances quelconques dont l'expoſant eſt entier, ou fractionaire, poſitif ou négatif. Une des plus importantes opérations qu'on faſſe ſur les ſeries, c'eſt de les ſommer. Cette opération demande beaucoup d'adreſſe & de ſagacité; mais on ne peut l'aſſujettir à aucune regle générale, & d'ailleurs cette matiere n'eſt point de notre ſujet. Si l'on veut en voir quelques exemples, il n'y a qu'à conſulter les Mémoires de l'Académie des Sciences, pluſieurs entre autres de M. Nicole dans leſquels cet illuſtre Analyſte fait uſage de ſeries qu'il parvient à ſommer avec le plus heureux ſuccès. On peut auſſi conſulter l'excellent & curieux Ouvrage de M. Jacques Bernoulli, qui a pour titre: *Tractatus de Seriebus infinitis, earumque ſummâ finitâ*, &c.

Je paſſe à l'application des ſuites au Calcul intégral.

§. II.

Uſage des ſuites pour le Calcul intégral.

CCCXXX.

PROBLEME I. Trouver par le moyen des ſuites l'intégrale des différentielles compriſes ſous la forme ſuivante $gx^m dx \cdot (a + bx^n)^p$, dans laquelle p eſt un nombre quelconque, & dans laquelle a eſt plus grand que bx^n.

1°. Pour les différentielles binomes compriſes dans la formule $gx^m dx \times (a+bx^n)^p$.

SOLUTION. Je réduis en ſuite infinie $(a+bx^n)^p$;

ce que je fais par le moyen de la formule de M. Newton. Comparant avec cette formule, je trouve $p = a$; $q = bx^n$; $m = p$: la ſuite eſt donc ici $a^p + pa^{p-1}b^1x^{1n} + \frac{p.(p-1)a^{p-2}b^2x^{2n}}{1.2} + \frac{p.(p-1).(p-2).a^{p-3}b^3x^{3n}}{1.2.3} + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3)a^{p-4}b^4x^{4n}}{1.2.3.4} + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3).(p-4)a^{p-5}b^5x^{5n}}{1.2.4.5}$ + &c.

Je multiplie chacun des termes de cette ſuite par $gx^m dx$, elle devient $gaa^p x^m dx + pga^{p-1}bx^{m+n}dx + \frac{p.(p-1).}{1.2} ga^{p-2}b^2x^{m+2n}dx + \frac{p.(p-1).(p-2)}{1.2.3} ga^{p-3}b^3x^{m+3n}dx + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3).}{1.2.3.4} ga^{p-4}b^4x^{m+4n}dx + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3).(p-4)}{1.2.3.4.5} ga^{p-5}b^5x^{m+5n}dx$.

Je prends (Art. 11.) l'intégrale de chaque terme en particulier, j'ai $\frac{ga^px^{m+1}}{m+1} + \frac{pga^{p-1}bx^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{p.(p-1).ga^{p-2}b^2x^{m+2n+1}}{1.2.(m+2n+1)} + \frac{p.(p-1).(p-2)ga^{p-3}b^3x^{m+3n+1}}{1.2.3.(m+3n+1)} + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3)ga^{p-4}b^4x^{m+4n+1}}{1.2.3.4(m+4n+1)} + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3).(p-4)ga^{p-5}b^5x^{m+5n+1}}{1.2.3.4.5.(m+5n+1)}$ + &c.

Si on diviſe chaque terme par ga^px^{m+1}, & qu'on multiplie toute la ſuite par cette même grandeur, elle devient $ga^px^{m+1} \times \left\{ \frac{b^0x^{0n}}{m+1} + \frac{p.a^{-1}bx^n}{m+1+n} + \frac{p.(p-1)}{1.2.(m+1+2n)} a^{-2}b^2x^{2n} + \frac{p.(p-1).(p-2)}{1.2.3.(m+1+3n)} a^{-3}b^3x^{3n} + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3)}{1.2.3.4.(m+1+4n)} a^{-4}b^4x^{4n} + \right.$

$$\frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot(p-3)\cdot(p-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot(m+1+5n)}\,a^{-5}\,b^{5}\,x^{5n}+\&c.\Big\}$$
$$=\int g x^{m}\,dx\cdot(a+bx^{n})^{p}.$$

CCCXXXI.

Si bx^n eſt $>a$, alors il faut mettre bx^n le premier terme du binome qui devient pour lors $(bx^n+a)^p$. Je le réduis en ſerie qui eſt $b^p x^{np}+pb^{p-1}x^{np-1n}a^1+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot2}b^{p-2}x^{np-2n}a^2+\frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)}{1\cdot2\cdot3}b^{p-3}x^{np-3n}a^3+\frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot(p-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}b^{p-4}x^{np-4n}a^4+\frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot(p-3)\cdot(p-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}b^{p-5}x^{np-5n}a^5+\&c.$

Je multiplie, comme ci-deſſus, chaque terme de la ſuite par $g\,x^m\,dx$, elle devient $g\,b^p\,x^{m+np}\,dx+pg\,b^{p-1}x^{m+np-n}a^1\,dx+\frac{p\cdot(p-1)\cdot g\,b^{p-2}x^{m+np-2n}a^2\,dx}{1\cdot2}+\frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot g\,b^{p-3}x^{m+np-3n}a^3\,dx}{1\cdot2\cdot3}+\frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot(p-3)\,g\,b^{p-4}x^{m+np-4n}a^4\,dx}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot(p-3)\cdot(p-4)\,g\,b^{p-5}x^{m+np-5n}a^5\,dx}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\&c.$

Je prends l'intégrale de chaque terme en particulier; cette opération me donne $\frac{g\,b^p\,x^{m+np+1}}{m+np+1}+\frac{pg\,b^{p-1}x^{m+np-n+1}a^1}{m+np-n+1}+\frac{p\cdot(p-1)\,g\,b^{p-2}x^{m+np-2n+1}a^2}{1\cdot2\cdot(m+np-2n+1)}+\frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\,g\,b^{p-3}x^{m+np-3n+1}a^3}{1\cdot2\cdot3\cdot(m+np-3n+1)}+\frac{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot(p-3)\,g\,b^{p-4}x^{m+np-4n+1}a^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot(m+np-4n+1)}+$

$$\frac{p.(p-1).(p-2).(p-3).(p-4)\,g b^{p-5} x^{m+np-5n+1} a^5}{1.2.3.4.5.(m+np-5n+1)} + \&c.$$

Diviſant chaque terme de la ſuite par $g b^p x^{m+np+1}$ & la multipliant toute entiere par cette même grandeur, on a enfin $g b^p x^{m+np+1} \times \left\{ \frac{b^{-0} x^{-0n}}{m+np+1} + \frac{p b^{-1} x^{-n} a^1}{m+np-n+1} + \frac{p.(p-1) b^{-2} x^{-2n} a^2}{1.2.(m+np-2n+1)} + \frac{p.(p-1).(p-2).b^{-3} x^{-3n} a^3}{1.2.3.(m+np-3n+1)} + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3) b^{-4} x^{-4n} a^4}{1.2.3.4.(m+np-4n+1)} + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3).(p-4) b^{-5} x^{-5n} a^5}{1.2.3.4.5\,(m+np-5n+1)} + \&c. \right\}$

$= \int g x^m dx (bx^n + a)^p.$

CCCXXXII.

2°. Pour les différentielles trinomes, quatrinomes, &c.

COROLLAIRE 1. Cette méthode s'étend auſſi aux différentielles trinomes, quatrinomes, &c. Soit, par exemple, propoſé d'intégrer $g x^m dx . (a + bx^n + cx^{2n})^p$; je regarde $a + bx^n + cx^{2n}$ comme un binome dont le premier terme eſt a, & le ſecond $bx^n + cx^{2n}$. Réduiſant en ſerie on a $a^p + p a^{p-1} . (bx^n + cx^{2n})^1 + \frac{p.(p-1)}{1.2} a^{p-2} . (bx^n + cx^{2n})^2 + \frac{p.(p-1).(p-2)}{1.2.3} a^{p-3} (bx^n + cx^{2n})^3 + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3)}{1.2.3.4} a^{p-4} (bx^n + cx^{2n})^4 + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3).(p-4)}{1.2.3.4.5} a^{p-5} (bx^n + cx^{2n})^5 + \&c.$ Je multiplie chaque terme de cette ſuite par $g x^m dx$, elle devient $g a^p x^m dx + p g a^{p-1} x^m dx . (bx^n + cx^{2n})^1 + \frac{p.p-1).g a^{p-2} x^m dx .}{1.2} (bx^n +$

$(bx^n + cx^{2n})^2 + \frac{p.(p-1).(p-2)}{1.2.3} \cdot ga^{p-3}x^m dx.$
$(bx^n + cx^{2n})^3 + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3)}{1.2.3.4} \cdot ga^{p-4}x^m dx.$
$(bx^n + cx^{2n})^4 + \frac{p.(p-1).(p-2).(p-3).(p-4)}{1.2.3.4.5} ga^{p-5}x^m dx.$
$(bx^n + cx^{2n})^5 +$ &c. Or comme dans cette ſerie la quantité $bx^n + cx^{2n}$ eſt toujours élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt un nombre entier, il eſt évident (Art. x.) qu'on pourra prendre l'intégrale de chaque terme en particulier. Cette opération nous donnera une ſuite infinie, qui étant ſommée ſera l'intégrale de $gx^m dx.(a + bx^n + cx^{2n})^p$.

CCCXXXIII.

Ce ſera le même procedé ſi on a un quatrinome, en un mot une grandeur compoſée d'un nombre quelconque de termes. Car regardant un des termes de cette grandeur comme le premier membre du binome, & tous ſes autres termes comme le ſecond membre, on la reduira en une ſuite infinie, dont on pourra toujours prendre l'intégrale terme à terme.

CCCXXXIV.

COROLLAIRE 2. Il ſuit de là que la quadrature d'un eſpace quelconque, & la rectification d'une courbe quelconque, peuvent toujours être repréſentées par des ſuites formées ſuivant les regles précédentes. Nous nous

3°. Application de la méthode des ſuites à la rectification & à la quadrature du cercle.

contenterons d'appliquer ce principe à la quadrature du cercle & aux logarithmes.

CCCXXXV.

PROBLEME 2. Trouver l'expreſſion de la rectification ou de la quadrature du cercle en ſuites infinies.

SOLUTION. Soit la portion de cercle AFH dont le diametre $= 2a$, $AB = x$, BC ou $FK = dx$; on aura $BF = \sqrt{(2ax - xx)}$. Soit l'arc AF dont l'élément eſt FH: on trouvera par la formule de l'Art. XCI. FH, élément de cet arc AF, $= \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Fig. 9.

Pour intégrer cette différentielle, je la réduis en ſuite, en multipliant $a\,dx$ par $(2ax - xx)$ élevé à la puiſſance $-\frac{1}{2}$ par le moyen de la formule de M. Newton expliquée (Art. CCCXXV.). Comparant la propoſée $(2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$ avec la formule $(p+q)^m$, on trouve

$$p = 2ax$$
$$q = -xx$$
$$m = -\tfrac{1}{2}$$

J'ai donc $\frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax-xx)}} = \overline{2ax}^{-\frac{1}{2}} . a\,dx + \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{2.2.\overline{2a}^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}\,dx}{2.4.\overline{2a}^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{5}{2}}\,dx}{2.8.\overline{2a}^{\frac{5}{2}}} + \frac{105x^{\frac{7}{2}}\,dx}{2.16.\overline{2a}^{\frac{7}{2}}} + \&c.$

L'intégrale de cette ſuite priſe terme à terme eſt $\overline{2ax}^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2.3.\overline{2a}^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{4.5.\overline{2a}^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{7}{2}}}{7.8.\overline{2a}^{\frac{5}{2}}} + \frac{105x^{\frac{9}{2}}}{9.16.\overline{2a}^{\frac{7}{2}}} +$ &c. Cette ſuite ſera d'autant plus convergente (Art. CCCXIII.) que x ſera plus petite par rapport à $2a$. Par

exemple, elle le ſera ſuffiſamment, ſi $x = \frac{a}{2}$, c'eſt-à-dire, ſi l'arc AF eſt de 60 degrés ; & alors après avoir pris l'intégrale, il faudroit la multiplier par 6 pour avoir la circonférence entiere.

CCCXXXVI.

Voici une autre maniere de trouver par les ſeries la rectification du cercle. Soit la tangente AB de l'arc AD, que je ſuppoſe de 30 degrés ; cherchons la valeur de ſon élement Dd. Soit le rayon $= 1$, $AB = x$, $Bb = dx$: CB ſera $= \sqrt{(1 + xx)}$. On trouvera (Art. XLIII. Introduction) que $Dd = \frac{dx}{1+xx}$. Fig. 9. Introduction.

Je réduis cette différentielle en ſuite par une diviſion infinie. La ſuite que me donne cette opération eſt $\frac{x^0 dx}{1} - \frac{x^2 dx}{1} + \frac{x^4 dx}{1} - \frac{x^6 dx}{1} + \frac{x^8 dx}{1} - \frac{x^{10} dx}{1} +$ &c.

Prenant l'intégrale terme à terme, j'ai $x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{9} x^9 - \frac{1}{11} x^{11} +$ &c.

Lorſque l'arc devient de 45 degrés, alors la tangente eſt égale au rayon : donc $x = 1$; la ſerie eſt donc $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. ; & en la multipliant par 8 elle exprimera la valeur de la circonférence.

CCCXXXVII.

On trouveroit de même l'expreſſion en ſuite de la quadrature du cercle, en intégrant par cette méthode $dx\sqrt{(2ax - xx)}$; $dx\sqrt{(aa - xx)}$, &c. nous ne nous arrêterons pas à ce détail. Il nous ſuffit d'avoir montré la voie qu'il faut ſuivre. Je paſſe aux logarithmes.

CCCXXXVIII.

4°. Application de la même méthode aux Logarithmes.

PROBLEME 3. Trouver par le moyen des ſuites le logarithme d'une quantité quelconque.

SOLUTION. L'équation de la logarithmique eſt comme nous l'avons vû (Art. XVIII. Introduction) $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y}$, c'eſt-à-dire, que la différence du logarithme d'une grandeur quelconque y, eſt $\frac{dy}{y}$: donc le logarithme de cette grandeur $y = \int \frac{dy}{y}$. Une ſuite égale à $\int \frac{dy}{y}$ ſera donc le logarithme cherché de y.

Je vois bien que je ne puis réduire en ſuite $\frac{dy}{y}$ ſous cette forme. Je lui en donne une autre en faiſant $y = 1 + z$; je ſuppoſe ici que y eſt un nombre plus grand que l'unité. J'ai $dy = dz$, & $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{1+z}$, que je puis réduire en ſerie par une diviſion infinie. Cette ſuite eſt $\frac{dz}{1} - \frac{z\,dz}{1} + \frac{z^2\,dz}{1} - \frac{z^3\,dz}{1} + \frac{z^4\,dz}{1} - \frac{z^5\,dz}{1} +$ &c.; dont l'intégrale eſt $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{6}z^6 +$ &c. C'eſt la formule pour trouver le logarithme d'un nombre plus grand que l'unité.

Lorſque le nombre repreſenté par y ſera moindre que l'unité, alors on ſuppoſera $y = 1 - z$; & on aura $\frac{dy}{y} = \frac{-dz}{1-z}$, dont l'intégrale en ſuite eſt $-z - \frac{1}{2}zz - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{6}z^6 -$ &c. C'eſt la formule pour trouver le logarithme d'un nombre moindre que l'unité.

CCCXXXIX.

Lorſqu'on demandera le logarithme d'un nombre plus

grand que l'unité, de 9 par exemple, on pourroit ſe ſervir de la premiere formule, en faiſant $z = 8$; ce qui donne $1 + z = 1 + 8 = 9$. Mais comme les termes de cette formule vont en augmentant, il vaut mieux ſe ſervir de la ſeconde formule dont les termes iront en décroiſſant très-rapidement.

Pour cela il faut ſe rappeller ce que nous avons dit (Art. IV.) que $lx = l1 - l\frac{1}{x} = 0 - l\frac{1}{x} = -l\frac{1}{x}$; on aura $l9 = -l\frac{1}{9}$. Donc en faiſant $z = \frac{8}{9}$, on aura $1 - z = 1 - \frac{8}{9} = \frac{9}{9} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$; & en changeant les ſignes de la ſeconde formule, on aura le logarithme cherché de 9.

Il eſt donc aiſé d'avoir par la formule précédente le logarithme de tout nombre, ſoit plus grand, ſoit plus petit que 10.

CCCXL.

5°. Aux fractions rationnelles.

REMARQUE 1. On voit bien que les fractions rationnelles qu'on ne pourra intégrer algébriquement par les regles expoſées dans le Chapitre X., s'intégreront par approximation en les réduiſant en ſuites par des diviſions infinies, & en prenant terme à terme l'intégrale de ces ſuites : nous n'entrerons point ici dans ce détail, qui n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul.

CCCXLI.

REMARQUE 2. GÉNERALE. De ce que la methode des ſuites ne donne l'intégrale des différentielles auxquelles

on l'applique, que par approximation, il s'enſuit qu'on ne doit s'en ſervir que lorſque les méthodes d'intégrer exactement nous manquent; encore faut-il avoir grand ſoin que les ſuites ſoient le plus convergentes qu'il ſera poſſible. Par ce moyen l'approximation différera infiniment peu de la vraie valeur cherchée.

FIN DE LA PREMIERE PARTIE.

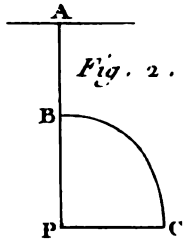


Fig. 2.

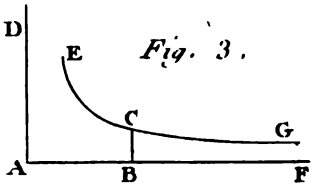


Fig. 3.

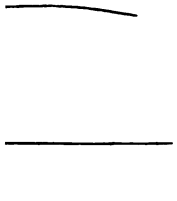


Fig. 4.

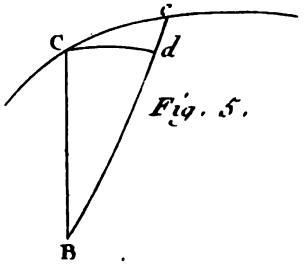
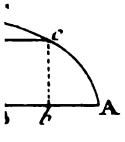


Fig. 5.



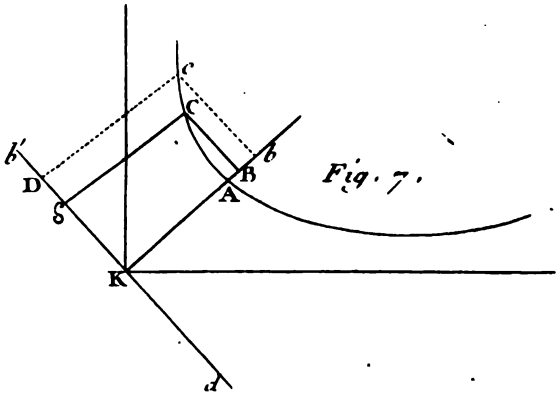


Fig. 7.

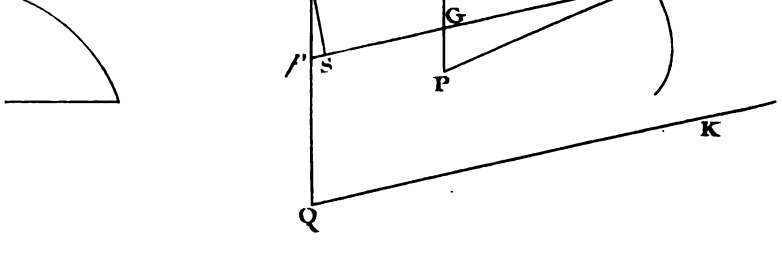


Fig. 8.

$= 0$; la ſuppoſition de $y = Ac^{fx}$ donne ici $f^n = 0$. Donc f a toutes ſes racines égales. Donc ſuivant ce que nous avons dit plus haut, il faudra faire $y = (a + bx + cxx + \ldots$ &c.$) c^{fx}$. Mais $f = 0$ donne $c^{fx} = c^0 = 1$. Donc la ſuppoſition ſe réduit à $y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \ldots + px^{n-1}$.

Et en effet c'eſt ce qu'on trouvera de même, en prenant ſucceſſivement autant d'intégrales que n contient d'unités. Soit $n = 4$, la propoſée ſera $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$, dx étant conſtant, on aura pour intégrale $\frac{d^3y}{dx^3}$, que l'on ſuppoſera égale à une conſtante de cette forme $\frac{a}{dx}$; ce qui fournit l'équation ſuivante $d^3y = adx^3$; & enſuite $ddy = axdx^2 + bdx^2$; $dy = \frac{ax^2dx}{2} + bxdx + cdx$. Donc enfin $y = \frac{ax^3}{2.3} + \frac{bx^2}{2} + cx + f$.

CHAPITRE VIII.

Comparaiſon de la Méthode expoſée dans le Chapitre précédent avec celle que nous avons donnée dans le Chapitre VI.

CCLVIII.

TElle eſt la méthode donnée par M. Euler pour la ſolution des équations renfermées dans la formule $\frac{ad^ny}{dx^n} + \frac{bd^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{gd^{n-2}y}{dx^{n-2}} +$ &c. $= 0$. Cette méthode

Démonſtration de la Méthode précédente.

TABLE
DES MATIERES
Contenues dans l'Introduction.

CHAPITRE I.
Définition du ſujet, Diviſion de l'Ouvrage, & Explication de quelques Signes dont on ſe ſervira dans la ſuite.

I. CE que c'eſt que le Calcul intégral, *Page* 1
II. Diviſion de l'Ouvrage, 2
III. Explication de quelques ſignes dont on ſe ſervira dans ce Traité, *ibid.*

CHAPITRE II.
Calcul différentiel des Quantités logarithmiques.

V. Définition des logarithmes, 5
VII. Maniere de dreſſer une table de logarithmes, 6
VIII. Quels ſont ceux dont ſe ſervent les Géométres, *ibid.*
IX. Definition de la logarithmique, 7
XI. Maniere de trouver ſon équation, *ibid.*
XII. Démonſtration de quelques propriétés principales de cette courbe, 8
XVI. Quels ſont les logarithmes de Neper, 11
Pourquoi on les nomme hyperboliques, *ibid.*
XVIII. Régle fondamentale du Calcul différentiel des logarithmes, 12
XIX. Solution d'une difficulté, 13
XX. Autre maniere de trouver certaines différentielles logarithmiques, 14

CHAPITRE III.
Calcul différentiel des Quantités exponentielles.

XXV. Définition des quantités exponentielles, 15
XXVI. Elles ſont de différens degrés, 16
XXIX. D'une équation exponentielle on en tire une logarithmique, 17
Et d'une logarithmique une exponentielle, 18
XXX. Explication de cette expreſſion $y = c^{z}$, *ibid.*

XXXI. Régle générale pour différentier les exponentielles, 19
XXXII. Appliquée à des exemples, 20
XXXIII. Autre méthode pour différentier ces mêmes quantités, *ibid.*
XXXIV. Nouvel exemple de la premiere méthode, *ibid.*
Autre exemple de la ſeconde méthode, 21

CHAPITRE IV.

Propoſitions ſur les Sinus, Coſinus, Tangentes, & Secantes.

XXXVI. Intégration de quelques différentielles, néceſſaire pour la ſuite, 22
XXXIX. Propoſitions ſur les ſinus &c. démontrées ſynthetiquement, 23
XLI. Autres ſur les ſinus &c. démontrées analytiquement, *ibid.*
XLV. Théorêmes ſur la même matiere, dans leſquels on fait uſage des quantités exponentielles, 26
XLVI. Uſage des propoſitions précédentes, 27
LI. On en tire une méthode fort ſimple, pour trouver les ſinus & coſinus d'arcs multiples d'un arc donné, 29
LXI. Lemme qui prépare au Théorême de M. Cotes ſur la diviſion des arcs de cercle, 35
LXIII. Démonſtration de ce théorême, 38
LXV. Application du théorême précédent à des cas particuliers, 39

CHAPITRE V.

Sur les Imaginaires.

LXX. Expreſſion générale qu'on peut donner à toute quantité imaginaire d'une forme quelconque, 41
LXXI. Conſéquence du théorême précédent, 45
LXXII. Application à quelques exemples, *ibid.*
LXXX. Toute racine imaginaire d'une équation quelconque peut ſe repréſenter par $A + B\sqrt{-1}$. 52
LXXXII. Toute équation ayant des racines imaginaires eſt reductible en facteurs trinomes réels, 56
LXXXIV. D'où eſt tirée la théorie précédente, 58

CHAPITRE VI.

Démonſtration de quelques propoſitions ſuppoſées plus haut, & d'autres néceſſaires dans ce Traité.

LXXXV. Toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle, 58
LXXXVII. Les racines imaginaires vont toujours en nombre pair, 59
LXXXVIII. Solution de quelques Problémes néceſſaires, 60

Fin de la Table des Matieres contenues dans l'Introduction.

TABLE

TABLE
DES MATIERES
Contenues dans la Premiere Partie.

CHAPITRE I.

Expoſition & application de la regle fondamentale de tout le Calcul intégral.

I. ÉNoncé de la régle fondamentale, 63
II. Son application 1°. à un exemple général incomplexe, 64
III. Cas unique qui peut faire quelque difficulté, *ibid.*
Solution de ce cas, *ibid.*
V. 2°. Application à des différentielles complexes, 65
VI. 3°. Aux fractions, *ibid.*
VIII. 4°. Aux différentielles affectées de ſignes quelconques, 66
Sous quelle condition, *ibid.*
X. Autre cas dans lequel on integre par la régle fondamentale, 67
XI. Formule pour ce dernier cas, 68
XII. Difficulté qui peut s'y trouver quelquefois, 69
XIII. Solution de cette difficulté, *ibid.*
XIV. Démonſtration de cette Solution, *ibid.*

CHAPITRE II.

Méthode pour faciliter l'intégration d'un grand nombre de différentielles par le moyen de différentes transformations.

XVI. Premiere transformation, 71
Conditions ſuivant leſquelles elle a lieu, *ibid.*
En quoi elle conſiſte, *ibid.*
XVII. Premier exemple, *ibid.*
XVIII. Second exemple, 72
XIX. Regle générale pour un aſſez grand nombre de cas, 73
XX. Formule pour la 1ere transformation $x^{rn} \cdot x^{n-1} dx \cdot (a + bx^n)^p$, *ibid.*
XXI. Démonſtration de cette formule, *ibid.*

	Premier cas, r= un nombre entier positif,	74
XXII.	Application du premier cas à un exemple,	*ibid.*
XXIII.	Second cas, ou $r=0$,	75
XXIV.	Examen de quelques cas particuliers,	*ibid.*
XXVII.	Autre maniere de ſe ſervir de la transformation précédente,	76
	Premier exemple,	*ibid.*
XXVIII.	Second exemple,	77
XXIX.	Troiſieme exemple,	*ibid.*
XXX.	Quatrieme exemple,	*ibid.*
XXXII.	Seconde transformation appliquée à un exemple,	78
XXXIII.	Autre maniere d'intégrer la différentielle qui vient de ſervir d'exemple,	79
XXXIV.	Troiſieme transformation appliquée au même exemple,	*ibid.*
XXXV.	Second exemple de la ſeconde transformation,	80
XXXVI.	Quatrieme transformation,	*ibid.*
	Premier exemple,	*ibid.*
XXXVII.	Second exemple,	81
XXXVIII.	Cinquieme transformation : premier exemple,	*ibid.*
XXXIX.	Second exemple un peu différent du premier,	82
XL.	Cas plus compliqués que les précédens dans leſquels notre premiere transformation réuſſit,	*ibid.*
XLI.	Deux formules qui comprennent ces cas,	83
	Premiere formule,	*ibid.*
	Seconde formule,	*ibid.*
XLII.	Sixieme transformation appliquée à un exemple,	84
XLIII.	Septieme transformation. Exemple,	*ibid.*
XLIV.	Obſervation utile ſur cette derniere transformation,	85
XLV.	Reflexions générales ſur les transformations que nous venons d'expliquer,	86

CHAPITRE III.

De l'addition des conſtantes, pour rendre les intégrales complettes.

XLVI.	Néceſſité d'ajouter une conſtante à l'intégrale trouvée,	*ibid.*
XLVII.	Toute intégrale peut ſe repréſenter par la ſurface d'une courbe,	87
XLVIII.	Méthode qui apprend à reconnoître quand l'intégrale eſt complette, & quand elle ne l'eſt pas, à trouver la conſtante qui la rendra complette,	88
XLIX.	Premier exemple,	*ibid.*
L	Second exemple,	*ibid.*
LI.	Démonſtration générale de cette méthode,	*ibid.*
LII.	Appliquée à la différentielle qui ſert de ſecond exemple,	89
LIII.	Exception à la régle,	90
LIV.	Cas où l'intégrale eſt négative,	91

CHAPITRE IV.

Définitions & notions préparatoires à l'intégration des différentielles binomes, trinomes, &c.

LVII. Définition des différentielles binomes, trinomes, &c. 93
LIX. Elles peuvent avoir deux formes identiques, 94
Méthode pour ôter de dessous le signe une grandeur qui y est, *& vice versâ*, *ibid.*
Procédé de cette méthode, 95
1°. Lorsqu'il s'agit de mettre sous le signe une grandeur qui n'y est pas, *ibid.*
LX. 2°. D'ôter de dessous le signe une quantité qui s'y trouve, *ibid.*
LXI. Cas où l'exposant de la puissance est fractionaire, *ibid.*
LXII. Cas où il est négatif, 96
LXIII. Usages de la méthode précédente, *ibid.*
1°. Pour rendre les exposans de nos formules de positifs négatifs, *ibid.*
LXIV. 2°. Pour ramener beaucoup de différentielles aux formules précédentes, *ibid.*
Application à des binomes, 97
LXV. Application à des trinomes, *ibid.*
LXVII. Troisieme usage de la même méthode, 98

CHAPITRE V.

Premiere partie de la méthode pour intégrer les différentielles binomes compriſes dans la formule $gx^m dx.(a+bx^n)^p$, *ou* $gx^{m+np} dx.(b+ax^{-n})^p$, *dans laquelle* p *eſt un nombre quelconque.*

LXIX. Elle contient les différentielles binomes qui s'intégrent algébriquement, 100
Procédé de la méthode, *ibid.*
LXX. Appliqué à la formule $gx^m dx.(a+bx^n)^p$, 101
LXXIII. Moyen d'abréger l'expreſſion de l'intégrale de la formule, 103
Premiere formule (ϕ), de l'intégrale des différentielles binomes qu'on peut ramener à $gx^m dx.(a+bx^n)^p$, 104
LXXVI. Seconde formule (ω) de l'intégrale des binomes, 106
LXXVIII. La ſeconde forme $gx^{m+np} dx.(b+ax^{-n})^p$, de la formule des binomes donne auſſi deux formules d'intégration, 107

CHAPITRE VI.

Obſervations ſur les deux formules d'intégration (↓) & (ω) *de la premiere partie de la méthode des binomes.*

LXXIX. Cas dans lequel $r\left(\frac{m+1}{n}-p\right)$ eſt un nombre entier poſitif, n'a point de difficulté, 107

Cas plus difficile quand $s\left(\frac{m+1}{n}\right)$ eſt un nombre entier poſitif, expliqué d'abord pour la premiere formule ↓, 108

LXXX. 1°. Lorſque s étant un nombre entier poſitif, r n'en eſt pas un, *ibid.*

LXXXI. Dans ce cas la premiere formule (↓) ne peut ſervir, 109

Mais alors la ſeule regle fondamentale donne l'intégrale, *ibid.*

LXXXII. 2°. Quand r & s ſont tous deux entiers poſitifs, *ibid.*

Premier cas $r < s$ n'a aucune difficulté, 110

LXXXIII. Second cas $r > s$ plus difficile, *ibid.*

L'intégrale de quelqu'un des termes dépendra de la quadrature de l'hyperbole, 111

LXXXIV. Cas de s = un nombre entier poſitif expliqué pour la ſeconde formule (ω) de l'intégrale des binomes, *ibid.*

Ce qu'il faut faire alors, *ibid.*

1°. s étant un nombre entier poſitif, & r ne l'étant pas, *ibid.*

LXXXV. 2°. r & s étant tous deux entiers poſitifs, 112

CHAPITRE VII.

Seconde partie de la méthode des différentielles binomes compriſes dans la formule

$$gx^m dx\,(a+bx^n)^p.$$

LXXXVII. Contient les différentielles qui s'intégrent en ſuppoſant la quadrature ou la rectification d'une courbe, 113

Elle donne auſſi deux formules d'intégration, *ibid.*

LXXXVIII. *Premiere formule* (Δ) *de la ſeconde partie de la méthode,*

Répondante à la formule (↓) de la premiere partie, 114

Seconde formule (χ) *de la ſeconde partie de la méthode,*

Répondante à la formule (ω) de la premiere partie, 115

LXXXIX. On regarde une différentielle comme l'élément de la quadrature ou de la rectification d'une courbe, 116
Et c'eſt d'ordinaire aux ſections coniques qu'on les applique, *ibid.*
XC. Les formules (Δ) & (X) indiquent les différentielles qui ſont dans ce cas, *ibid.*
Méthode pour trouver les élémens des ſections coniques, 117
XCI. 1°. Ceux de leur rectification, *ibid.*
Formule pour cette rectification, *ibid.*
XCII. Uſage de cette formule pour conſtruire une table de ces élémens, *ibid.*
XCIII. 2°. Ceux de leur quadrature, 119
Il faut diſtinguer deux cas, *ibid.*
1°. Courbes dont les ordonnées ſont paralleles, *ibid.*
Formule pour ce cas, 120
2°. Courbes dont les ordonnées partent du même point, *ibid.*
Formule pour ce ſecond cas, *ibid.*
Uſage des deux formules précédentes, *ibid.*
XCV. Obſervations ſur les tables précédentes, 122
XCVI. Application des formules (Δ) & (X) de la ſeconde partie de la méthode; 123
1°. De la formule (Δ), *ibid.*
Premier exemple, *ibid.*
XCVII. Second exemple, 124
XCIX. 2°. Application de la formule (X), 125
Défaut de la ſeconde partie de la méthode, *ibid.*

CHAPITRE VIII.

Examen des différentielles qui, ſuivant la ſeconde partie de la méthode des binomes, dépendent de la quadrature ou de la rectification du cercle.

C. $x^m dx . (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$ m étant un nombre pair négatif, eſt intégrable abſolument, 126
Démonſtration de cette propoſition, *ibid.*
CI. Autre maniere de s'en aſſurer, 127
CII. Contradiction apparente, *ibid.*
CIII. Maniere de la lever, 128
CIV. Examen 1°. des quantités qui ſe rapportent à la quadrature du cercle exprimée par $\int dx \sqrt{(rr - xx)}$, 129
CV. 2°. Des différentielles dépendantes de la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{dx}{\sqrt{(ax - xx)}}$, 130
Solution d'une contradiction apparente, 131
CVI. 3°. Des différentielles dont l'intégrale eſt liée avec la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{rr\,dx}{x\sqrt{(xx - rr)}}$, *ibid.*
CVII. 4°. Enfin des différentielles dépendantes de la quadrature du cercle exprimée par $\int \frac{rr\,dx}{rr + xx}$, 132

CVIII. Réflexion importante ſur l'uſage qu'on doit faire de ce qui précede, 133

CHAPITRE IX.

Application de la Méthode des Binomes aux différentielles trinomes repréſentées par la formule

$$g x^m dx . (a + b x^n + c x^{2n})^p, \text{ ou}$$

$$g x^{m+2np} dx . (c + b x^{-n} + c x^{-2n})^p.$$

CXI. 1°. Pour les différentielles trinomes qui s'intégrent algébriquement; Le procédé eſt à peu près le même que pour les binomes, 135
CXV. 2°. Pour les différentielles trinomes dépendantes de la quadrature ou de la rectification des ſections coniques, 138

CHAPITRE X.

Regles du Calcul intégral des fractions rationelles.

CXVII. Regle générale pour trouver l'intégrale des différentielles logarithmiques,
Appliquée à des exemples, 139
CXIX. Addition de la conſtante pour compleier l'intégrale, 140
CXXI. Définition des fractions rationelles, *ibid.*
CXXIII. Expoſition de la méthode de M. Bernoulli pour les intégrer, 141
CXXVI. Examen de cette méthode, 145
Ses défauts, *ibid.*
CXXVII. Trois cas à diſtinguer dans l'intégration des fractions rationelles, *ibid.*
CXXVIII. Premier cas où le dénominateur a ſes racines toutes réelles, 146
1°. Réelles égales, *ibid.*
Inconvénient de la méthode de M. Bernoulli dans ce cas, *ibid.*
CXXX. 2°. Racines réelles inégales, 147
CXXXI. 3°. Racines réelles en partie égales & en partie inégales, *ibid.*
La méthode de M. Bernoulli eſt encore défectueuſe dans ce cas, *ibid.*
CXXXII. Expoſition d'une autre méthode pour le cas des racines réelles inégales, 148
CXXXVI. Démonſtration de la méthode de M. Bernoulli, 151
CXXXVII. Application de notre derniere méthode au cas des racines réelles, en partie égales & en partie inégales, 152
CXLI. Explication d'un paſſage de M. Newton, 155
CXLIII. Expoſition de la méthode de M. Côtes pour déterminer les coefficiens du numérateur des fractions rationelles, 156
1°. Lorſque les racines du dénominateur ſont réelles & inégales, 157
CXLV. Application de cette méthode à quelques exemples, 160
Premier exemple, *ibid.*

CXLVI. Second exemple, 161
CXLVII. Troiſieme exemple, *ibid.*
CXLVIII. 2°. Lorſque les racines du dénominateur ſont en partie égales & en partie inégales, 162
CXLIX. Application à un exemple, 164
CL. Cas où l'on abrege la méthode du Problême précédent, *ibid.*
CLI. Autre exemple, 165
CLIII. Second cas où le dénominateur a ſes racines imaginaires, *ibid.*
Inconvénient de la méthode de M. Bernoulli dans ce cas, 166
CLIV. Dans ce cas on y ſubſtitue notre méthode du Problême 2, 167
CLVII. Uſage de la méthode de M. Côtes dans le cas des racines imaginaires pour déterminer les coefficiens du numérateur, 168
CLX. Application des formules du Problême 7 à un exemple, 171
CLXI. Troiſieme cas, lorſque les racines du dénominateur ſont en partie réelles & en partie imaginaires, 173
Uſage de la méthode de M. Côtes dans ce cas, 174
CLXII. Application à un exemple, *ibid.*
CLXIV. Les numérateurs des fractions rationelles étant déterminés par les méthodes précédentes, comment on trouve les dénominateurs? 176

CHAPITRE XI.

Examen des cas où le dénominateur eſt $bx^{2m} + gx^m + f$, *ou* $x^n + a^n$, *dans leſquels on abrege la méthode générale.*

CLXVI. 1°. Comment on a le dénominateur de ces fractions, 177
CLXVIII. 2°. Comment on trouve les numérateurs, 179
1°. Quand le dénominateur eſt $1 + x^\lambda$, *ibid.*
CLXXI. 2°. Lorſque le dénominateur eſt $1 + 2ix^\lambda + x^{2\lambda}$, 182

CHAPITRE XII.

Maniere de trouver algébriquement dans certains cas les facteurs de $x^n + a^n$ *&* $x^{2m} + px^m + q$.

CLXXIII. Recherche des facteurs de $x^n + a^n$, 184
1°. *n* étant un nombre de la progreſſion géométrique 1. 2. 4. 8. 16 &c. *ibid.*
CLXXIV. Application à un exemple. 186
CLXXVIII. 2°. *n* étant un nombre ſimplement pair, 188
CLXXIX. Application à pluſieurs exemples, 189
Premier exemple, *ibid.*
CLXXX. Second exemple, *ibid.*

CLXXXII. Les facteurs de $x^{2m} + px^m + q$ se trouvent par les mêmes procédés que ceux de $x^n + a^n$, 191
CLXXXIII. Observations particulieres sur ce qui précede, *ibid.*

CHAPITRE XIII.

Des différentielles qui peuvent se ramener à des fractions rationelles.

CLXXXVI. Examen des différentielles les plus générales qui peuvent se transformer en fractions rationelles, 195
& suiv.
CXCIX. Conclusion de ce qui regarde les fractions rationelles, 197
Quels sont les Auteurs qui ont écrit sur cette matiere, *ibid.*

CHAPITRE XIV.

Des différentielles qui se rapportent à la rectification de l'ellipse ou de l'hyperbole.

CC. Quels sont les Géometres qui ont écrit sur cette matiere, 198
CCI. 1°. Elément de la rectification d'une ellipse dont le grand axe est $2a$ & p le parametre. *ibid.*
CCII. Différentielle qui en dépend immédiatement, 199
CCVI. 2°. Elément d'une hyperbole dont le premier axe est $2a$, & le parametre p, 202
Différentielle qui en dépend immédiatement, 203
CCVII. Elément de l'hyperbole par rapport à son second axe, *ibid.*
Donne la même différentielle que la précédente, *ibid.*
CCVIII. Différentielle qui dépend de la rectification de l'hyperbole équilatere, 204
CCIX. Autre différentielle qui se ramene à la rectification de l'hyperbole, *ibid.*

CHAPITRE XV.

Des différentielles dont l'intégration dépend à la fois de la rectification de l'ellipse & de celle de l'hyperbole.

CCX. Premier exemple de ces différentielles, 205
CCXII. Reflexion sur le fréquent usage des transformations enseignées au commencement de ce Traité, 207
CCXIII. Autres différentielles qui sont dans le cas des précédentes, 208
CCXIV. Troisieme exemple, 213
CCXV. Quatrieme exemple, 225

CHAPITRE XVI.

Suite des deux Chapitres précédens ſur les différentielles dont l'intégration dépend de la rectification des ſections coniques.

CCXIX. Application aux exemples les plus généraux, 219
Premier exemple, *ibid.*
CCXXII. Différentielles qui dépendent de la précédente, 222
CCXXVI. Différentielle qui dépend de la rectification de l'hyperbole ſeule, 224
CCXXVII. Second exemple, 225
CCXXVIII. Autres différentielles dont l'intégrale ſuit de celle de notre ſecond exemple, 227
CCXXXII. Troiſiéme exemple, 229
CCXXXIII. Quatriéme exemple, *ibid.*
CCXXXV. Conſéquences qu'on en peut tirer, 233

CHAPITRE XVII.

Des différentielles dont l'intégration dépend de la quadrature des courbes du troiſieme ordre.

CCXXXVII. Définition des courbes du troiſieme ordre, 234
CCXXXVIII. Leur formule générale, 235
Quels ſont les Géometres qui ont écrit ſur cette matiere, *ibid.*
Quatre équations auxquelles ſe ramenent toutes celles des courbes du troiſiéme ordre, *ibid.*
CCXXXIX. La quadrature de toutes les courbes du troiſiéme ordre ſe réduit toujours à celle d'une des quatre équations précédentes, 236
CCXL. Différentielle qui dépend de la quadrature d'une courbe du troiſieme ordre, dont l'équation eſt $uyy = k + lu + mu^2 + nu^3$, 237
CCXLI. Cas unique dans lequel la démonſtration précédente peut faire quelque difficulté, 239
Solution de cette difficulté, 240
CCXLIV. Différentielle dont l'intégrale dépend de la rectification des ſections coniques & de la quadrature précédente, 246
Cas dans leſquels l'intégrale cherchée dépend uniquement des arcs de ſections coniques, 248
CCXLV. Différentielles qui dépendent de la précédente, *ibid.*
CCL. Autre différentielle dépendante des arcs de ſections coniques, & de l'aire de courbes du troiſieme ordre, 251
CCLI. Différentielles qui dépendent de la précédente, 256
CCLIII. Cas dans leſquels les différentielles précédentes ſe rapportent uniquement à des arcs de ſections coniques, 258
CCLIV. Démonſtration de ces cas, *ibid.*
CCLIX. Quadrature des courbes du troiſiéme ordre, 266

CHAPITRE XVIII.

De la quadrature des courbes dont les équations ont trois termes.

CCLXII. Formule générale des équations qui contiennent trois termes, 268
Transformation néceſſaire pour préparer l'équation, $y = x^r u$, 269
CCLXIII. Cas dans leſquels on trouve la valeur de x en u, *ibid.*
CCLXIV. Ils ſont au nombre de cinq pour les équations à trois termes, 270
CCLXV. Examen d'un des cinq cas précédens, *ibid.*
CCLXVI. Recherche des cas dans leſquels la courbe de l'équation à trois termes eſt quarrable, 271
CCLXVII. Examen de ceux dans leſquels l'intégrale dépend de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, 272
CCLXVIII. Moyen d'avoir les cas dans leſquels l'intégration dépend de la rectification des ſections coniques, 276
CCLXIX. Application des principes précédens à la quadrature du *folium*. *ibid.*

CHAPITRE XIX.

De la quadrature des courbes dont les équations ont quatre termes.

CCLXX. Formule des équations à quatre termes, 277
CCLXXI. On ſe ſert encore de la transformation $y = x^r u$, 278
CCLXXII. Cas dans leſquels on a la valeur de x en u, *ibid.*
Ils ſont au nombre de dix-huit, 280
CCLXXIII. Différence eſſentielle entre les équations à trois termes & celles qui en ont quatre, *ibid.*
CCLXXV. On trouve par la méthode du Chapitre précédent les cas d'intégration des équations à quatre termes, 281

CHAPITRE XX.

Des différentielles qui renferment des logarithmes & des exponentielles.

CCLXXVI. 1°. Sur l'intégration de celles qui contiennent des logarithmes, *ibid.*
CCLXXVII. Uſage des ſubſtitutions pour intégrer ces quantités, 282
Premier exemple, *ibid.*
CCLXXVIII. Second exemple, *ibid.*
CCLXXIX. Troiſieme exemple, *ibid.*
CCLXXX. Quatrieme exemple, 283
CCLXXXI. Cinquieme exemple, *ibid.*

CCLXXXII. 2°. Intégration des différentielles exponentielles, Regle générale. Appliquée à des exemples, *ibid.*
CCLXXXIV. Uſage des ſubſtitutions pour trouver les mêmes intégrales, 284
Premier exemple, *ibid.*
CCLXXXV. Second exemple, 285
CCLXXXVI. Troiſieme exemple, *ibid.*
CCLXXXVII. Autre méthode pour trouver les intégrales des différentielles logarithmiques & exponentielles, *ibid.*
En quoi elle conſiſte,
CCLXXXVIII. Notion préparatoire, *ibid.*
CCLXXXIX. Application de la méthode de prendre l'intégrale par parties, 1°. Aux différentielles logarithmiques, 286
CCXCI. Formule pour l'intégration des différentielles logarithmiques repréſentées par $x^m dx . (lx)^n$, 287
CCXCII. 2°. Application de la même méthode aux différentielles exponentielles, 288
CCXCIV. Formule d'intégration des différentielles exponentielles repréſentées par $z^m c^{kz} dz$, lc étant $= 1$, 289

CHAPITRE XXI.

Des différentielles affectées de pluſieurs ſignes d'intégration.

CCXCVII. Obſervation eſſentielle ſur l'expreſſion de ces ſortes de différentielles, 290
Deux différens cas à y diſtinguer, 291
CCXCVIII. Expoſition du premier cas, *ibid.*
Procédé qu'il faut ſuivre pour intégrer, *ibid.*
CCXCIX. Transformation qui ſimplifie l'expreſſion dans ce même cas. 292
CCC. Examen du ſecond cas,
Comment on trouve l'intégrale, *ibid.*
Différentielle qui ſert d'exemple $u^3 dx$, *ibid.*
Son intégrale, 293
CCCI. Autre méthode pour avoir la même intégrale,
Par le moyen des quantités exponentielles, *ibid.*
CCCIV. Autre uſage de la même méthode, 296
CCCVI. Méthode particuliere, utile dans certains cas, 297
CCCVII. Remarque importante ſur les exponentielles imaginaires, 298

CHAPITRE XXII.

Des différentielles qui s'integrent par le moyen des ſeries *ou* ſuites infinies.

§. I. *Théorie des Suites.*

CCCIX. Définition des Suites, 302
CCCX. Leur diviſion en *convergentes* & *divergentes*, *ibid.*

CCCXI. Application des Suites aux diviſions infinies, 302
CCCXIII. Pour qu'une ſuite ſoit convergente & vraie, le plus grand terme doit être le premier en diviſeur, 304
CCCXV. Les ſeries convergentes ſont les ſeules vraies, 307
CCCXVI. Diviſion des ſeries convergentes en *croiſſantes* ou *aſcendantes*, & *décroiſſantes* ou *deſcendantes*, 308
CCCXVIII. Embarras dans le cas où le dénominateur a ſes termes égaux, 309
CCCXIX. Ce qu'il faut faire dans ce cas, 310
Application à un exemple, *ibid.*
CCCXX. Second exemple, 311
CCCXXII. Uſage des ſuites pour l'extraction des racines, 312
CCCXXIV. Pour que la ſerie ſoit vraie, le plus grand terme doit être le premier, 314
CCCXXV. Moyen d'abréger les opérations précédentes, en ſe ſervant du Théorême de M. Newton pour l'élévation d'un binome à une puiſſance quelconque, *ibid.*

§. II. *Uſage des Suites pour le Calcul intégral.*

CCCXXX. 1°. Pour les différentielles binomes compriſes dans la formule $gx^m\,dx\,.\,(a+bx^n)^p$, 317
CCCXXXII. 2°. Pour les différentielles trinomes, quatrinomes, &c. 320
CCCXXXIV. 3°. Application de la méthode des Suites à la rectification, ou à la quadrature du cercle, 321
CCCXXXVIII. 4°. Application de la même méthode aux logarithmes, 324
CCCXL. 5°. Aux fractions rationelles, 325

Fin de la Table des Matieres contenues dans la Premiere Partie.

CCLXXIII.

1°. En faiſant dans $(a+bx^n)x^2\,ddv+(c+fx^n)$ Premiere Serie. $x\,dx\,dv+(g+hx^n)v\,dx^2=0$, $v=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}+Dx^{m+3n}+Ex^{m+4n}+$ &c. on aura $dv=mAx^{m-1}dx+(m+n)Bx^{m+n-1}dx+(m+2n)Cx^{m+2n-1}dx+(m+3n).Dx^{m+3n-1}dx+(m+4n).Ex^{m+4n-1}dx+$ &c.; & comme dx eſt conſtant, on aura $ddv=m.(m-1)Ax^{m-2}dx^2+(m+n).(m+n-1)Bx^{m+n-2}dx^2+(m+2n).(m+2n-1).Cx^{m+2n-2}dx^2+(m+3n).(m+3n-1).Dx^{m+3n-2}dx^2+(m+4n).(m+4n-1).Ex^{m+4n-2}dx^2+$ &c. Subſtituant dans l'équation $(a+bx^n)x^2\,ddv+(c+fx^n).x\,dx\,dv+(g+hx^n)x\,dx^2=0$, pour v, dv, ddv, ces valeurs, on aura la transformée ſuivante (N) $\{cm+g+am.(m-1)\}Ax^m\,dx^2+\{(cm+cn+g+(m+n).(m+n-1)a)B+(fm+h+bm.(m-1))A\}x^{m+n}dx^2+\{(fm+fn+h+(m+n).(m+n-1)b)B+(cm+2cn+g+(m+2n).(m+2n-1)a)C\}x^{m+2n}dx^2+\{(fm+2fn+h+(m+2n).(m+2n-1)b)C+(cm+3cn+g+(m+3n).(m+3n-1)a)D\}x^{m+3n}dx^2+\{(fm+3fn+h+(m+3n).(m+3n-1)b)D+(cm+4cn+g+(m+4n).(m+4n-1)a)E\}x^{m+4n}dx^2+\{(fm+4fn+h+(m+4n).(m+4n-1)b)E\}x^{m+5n}dx^2+$ &c. $=0$.

J'égale maintenant à zéro les termes homogenes, j'aurai

la valeur déterminée des coefficiens A, B, C, D, E, & de l'expoſant m. D'abord on a $g+cm+am\cdot(m-1)=0$; & afin de ne pas tomber dans des quantités affectées de ſignes radicaux, je regarde m comme un nombre connu, & je m'en ſers pour déterminer g. J'aurai donc $g=-cm-am.(m-1)$.

Le ſecond terme nous donne $\{cm+cn+g+(m+n).(m+n-1)a)\}B+(fm+h+bm.(m-1))A=0$. Je ſubſtitue dans cette équation au lieu de g ſa valeur, j'aurai $\{cm+cn-cm-am.(m-1)+(m+n).(m+n-1)a)\}B+\{fm+h+bm.(m-1)\}A=0$, & en effaçant ce qui ſe détruit, on a

$$B=\frac{-A.[h+fm+bm.(m-1)]}{cn+an.(2m+n-1)}.$$

Faiſant les mêmes opérations ſur les termes ſuivants, on trouve

$$C=\frac{-B.[h+f(m+n)+b(m+n).(m+n-1)]}{2cn+2an.(2m+2n-1)}$$

$$D=\frac{-C.[h+f(m+2n)+b(m+2n).(m+2n-1)]}{3cn+3an.(2m+3n-1)}$$

$$E=\frac{-D.[h+f(m+3n)+b(m+3n).(m+3n-1)]}{4cn+4an.(2m+4n-1)}$$

&c.

On voit par là que A ſera une quantité conſtante arbitraire, dont la détermination donnera celle de tous les coefficients ſuivants. Il eſt encore évident que les valeurs de ces coefficients étant une fois déterminées, ſi un ſeul d'entre eux eſt égal à zéro, tous les ſuivants s'évanouiront, en ſorte que dans ces cas la valeur de v ſera finie, & par conſéquent l'équation (M) intégrable.

Suppoſons, par exemple, que $h+fm+bm.(m-1)$

$= 0$, alors $B = 0$, donne $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$; & par conſéquent $v = Ax^m$ & la transformée ſera $\{m.(m-1).(a+bx^n)+m.(c+fx^n)+(g+hx^n)\} Ax^m dx^2 = 0$, dont on connoît l'intégrale.

Si $h+f(m+n)+b(m+n).(m+n-1) = 0$, alors on aura $C = 0$, & par conſéquent $D = 0$, $E = 0$; on aura donc $v = Ax^m + Bx^{m+n}$.

Si $h+f(m+2n)+b(m+2n).(m+n-1) = 0$, alors $D = 0$ donne auſſi $E = 0$, & $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n}$. Donc en général en ſuppoſant i un nombre entier poſitif ou zéro, l'équation propoſée (M) ſera intégrable toutes les fois qu'on aura $h+f(m+in)+b(m+in).(m+in-1) = 0$, ou $h = -f(m+in) - b(m+in).(m+in-1)$.

Equations de condition ſuivant leſquelles la premiere Serie ſera terminée & la formule (M) intégrable.

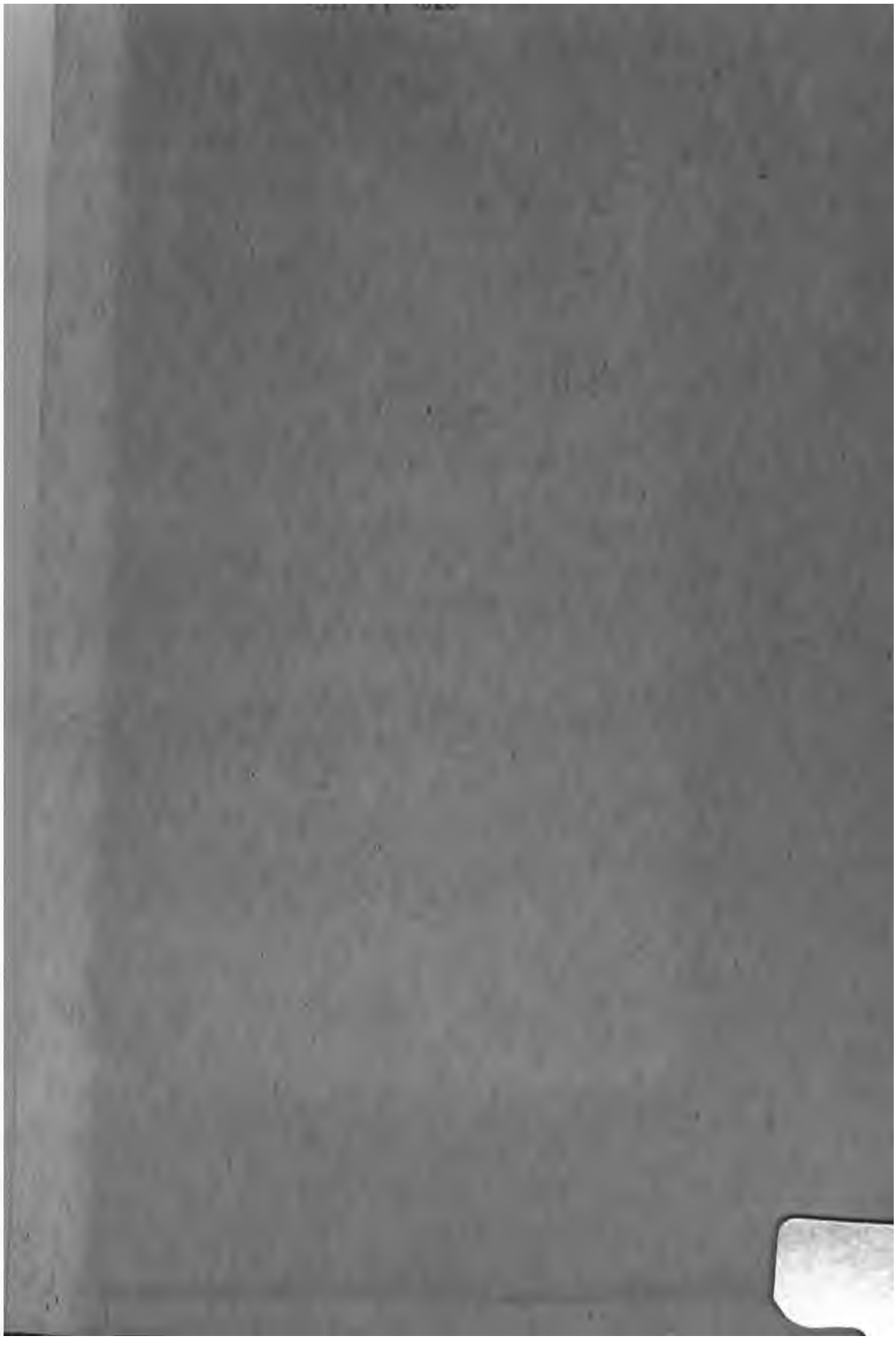
CCLXXIV.

Il y a cependant des cas dans leſquels cette méthode ne nous donneroit point l'intégrale que nous demandons; ce ſont ceux dans leſquels le dénominateur de nos coefficients s'évanouiroit; par exemple, ſi on avoit $c = -a.(2m+in+n-1)$.

CCLXXV.

2°. Je ſuppoſe maintenant $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n} + Dx^{k-3n} + Ex^{k-4n} +$ &c. Je fais les mêmes calculs que nous venons de faire plus haut: ils me donnent les valeurs de v, dv, ddv; je ſubſtitue ces valeurs

Seconde Serie.



A ſera ici comme dans la ſerie (N) une quantité conſtante arbitraire, de laquelle dépendra la détermination de tous les autres coefficients; & en général ſi on ſuppoſe dans cette ſerie (P)

$$g = -c(k-in) - a(k-in).(k-in-1),$$

i étant un nombre entier poſitif ou zéro, la ſerie s'arrêtera, & l'on aura l'intégrale de l'équation (M).

Cas dans leſquels cette ſeconde Serie ſera terminée & la formule (M) intégrable.

Par exemple, ſi $i = 0$, on a B, C, D, E égaux à zéro, & par conſéquent $v = Ax^k$: ſi $i = 1$, on aura $v = Ax^k + Bx^{k-n}$, & $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$; & ainſi de ſuite.

CCLXXVI.

Réunion de tous les cas d'intégrabilité précédents.

COROLLAIRE. De ce que nous venons de dire il s'enſuit que l'équation $(a+bx^n)x^2 ddv + (c+fx^n)xdxdv + (g+hx^n)vdx^2 = 0$, dans laquelle

$$g = -cm - am.(m-1)$$

& . . . . . $h = -fk - bk.(k-1)$

ſera intégrable toutes les fois qu'on aura $f(-m-in) = h + b(m+in).(m+in-1)$, ou $c.(-k+in) = g + a(k-in).(k-in-1)$; ou bien en mettant pour h & g leurs valeurs, on trouvera l'équation intégrable, lorſque $f = \frac{[(m+in).(m+in-1) - k.(k-1)]b}{k-m-in} =$ (en faiſant la diviſion) $[1-k-m-in]b$; ou lorſque $c = \frac{[(k-in).(k-in-1) - m.(m-1)]a}{m-k+in} = (1-k-m+in)a$.

On a donc deux façons différentes de trouver une infinité de cas dans leſquels la propoſée eſt intégrable; &